张量分析及其应用

王甲升 编

高等教育出版社

ZHANGLIANG FENXI
JIQI YINGYONG

张量分析及其应用

王甲升 编

高等教育出版社

内 容 介 绍

“张量分析”是研究固体力学及流体力学的重要数学工具。本书紧密结合工程力学来介绍张量分析的理论，全书共分四章，第一章预备知识，从物理恒量是与坐标选取无关的物理量谈到物理恒量的充要条件，接着引进张量概念，介绍 Kronecker 记号 δ_{ij} 和排列记号 e_{ijk} 及一些预备知识。第二章二阶仿射正交张量，阐明了“仿射”这一基本概念，对二阶仿射正交张量下定义，并举五个实例加以说明，同时介绍张量的代数运算，微分法则，最后以笛卡尔张量表示力学基本方程，联系到应用。第三章斜交曲线坐标系与张量分析，本章是在前章基础上的推广。第四章张量分析与流体力学，由浅入深地介绍了张量分析如何应用于流体力学，使读者能对采用张量形式基本方程求解问题有基本了解，并掌握其基本方法。

本书可作为大学本科学生，研究生及工程技术人员参考书。

本书责任编辑　周崇芝
本书责任绘图　朱瑞华

张量分析及其应用
王甲升　编
·
高等教育出版社出版
新华书店上海发行所发行
商务印书馆上海印刷厂印装
·
开本 850×1168 1/32　印张 9.5　字数 227,000
1987 年 8 月第 1 版　1987 年 8 月第 1 次印刷
印数 00,001—8,250

书号 15010 · 0765　　定价 1.90 元

前　言

“张量分析”是研究固体力学、流体力学及连续介质力学的重要数学工具。它具有高度概括、形式简洁的特点。一些先进国家将“张量分析”作为大学高年级学生及研究生的常规课或选修课开设。

近几年来，随着我国对外学术交流的加强，许多教师和科技工作者希望了解和熟悉“张量分析”的有关知识。为适应新形势下的要求，有些高等院校正在开设“张量分析”课程。

1978 年以来，编者为研究生学习的需要编写了有关讲义，并于 1979 年为本院研究生开设“张量分析”课程。数年来曾在一些高等院校及研究单位作汇报讲授，在汇报过程中，得到广大教师、科技工作者的热情支持和鼓励，希望能整理、改编，予以出版，以供教学及科学研究工作者参考。

本书力求由浅入深、密切联系工程力学。为便于阅读，本书尽量选用其他参考书常用的符号。

本书稿经山东海洋学院顾乃亨教授及武汉水利电力学院郑邦民副教授审阅，提出了许多宝贵意见和建议，谨此表示感谢。编者特别感谢美国 Howard 大学机械系范大年教授所给予的鼓励和帮助。

限于编者水平，疏误之处欢迎有关专家和读者批评指正。

编　者

一九八五年六月

于上海机械学院

目　　录

第一章　预备知识

第一节　概　　述

任一物理现象都是按照一定的客观规律进行的，它们是不以人们的意志为转移的。但是，在研究、分析这一物理现象时，人们采用的方法则是由人们的意志决定的。无数事实证明，研究方法的选用与当时人们对客观事物的认识水平有关，而研究方法的好坏则直接关系到求解问题的繁简程度。

在有关力学问题中，这类事例是屡见不鲜的。流体力学问题的求解，首先遇到的是：如何针对所提出的问题选用合理的坐标系。因为坐标系选择正确与否直接影响到对问题的求解，下面试举数例加以说明。

设流体以等速度 $\boldsymbol{v}$ 自左向右运动(图1-1)，如选用笛卡尔坐标系，并取 Ox 轴沿速度 $\boldsymbol{v}$ 方向，对于这一坐标系而言，我们有

$$v_x=v=\text{const},\ v_y=0,\ v_z=0$$

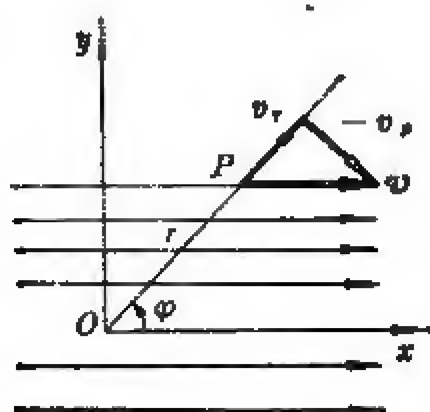


图 1-1

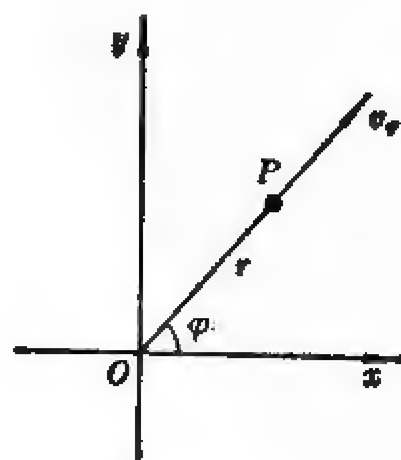


图 1-2

但是，如果选用极坐标系，流场上一点 P 的速度，其沿径向、周向速度分量 v_r、v_φ 则分别是

$$v_r = v\cos\varphi; \quad v_\varphi = -v\sin\varphi$$

由上例可见，即使合速度

$$\sqrt{v_r^2 + v_\varphi^2} = \sqrt{v^2\cos^2\varphi + v^2\sin^2\varphi} = v$$

不变，仍然是常值，但其在极坐标系下的分速度则不同于笛卡尔坐标系下的分速度，它们不再是常值，而是坐标 φ 的函数。

与此相反，对于不可压缩流体的点源流动，如果采用极坐标系(图1-2)，则

$$v_r = v(r) = \frac{A}{r}, \quad v_\varphi = 0$$

即速度 v 只是 r 的函数且周向分量为零，但如选用笛卡尔坐标系，则为

$$v_x = v\cos\varphi, \quad v_y = v\sin\varphi$$

或
$$v_x = v\cos\varphi = A\frac{\cos\varphi}{r}; \quad v_y = v\sin\varphi = \frac{A\sin\varphi}{r}$$

上式表明，在笛卡尔坐标系下，速度 v 的分量 v_x、v_y 都是笛卡尔坐标 x、y 的函数。

以上两例说明，由于选用的坐标系不同，虽然所反映的客观规律并不改变(仍是等速直线运动和点源流动)，但其速度分量则有较大区别。如果坐标系选择适当，其速度分量可能是常值或为零。反之，则变成一个坐标乃至多个坐标的函数，速度分量的函数关系越复杂。求解也越困难。

这里是以速度为例，说明速度分量和坐标系选择密切相关，其实，所有的物理量都有类似的性质。

由于物理量的分量和坐标系选择有关，所以由物理量的分量表示的力学基本方程，其形式也必然与坐标系选择有关。每选用

一种坐标系都需要作一些繁琐的推导以建立力学的基本方程。

现在提出的任务是：运用一些数学知识，建立起统一的、普遍适用的力学基本方程。为了完成这一任务，先分析以上两例，并从中得出可供参考的规律性。

从以上两例得出：尽管速度分量随坐标选择而异，但

1．速度 $\boldsymbol{v}$ 本身并不因坐标系选择不同而异；

2．两类坐标系下的速度 $\boldsymbol{v}$ 诸分量虽然不同，但它们之间是相互有联系的。

下面就以此为出发点，逐步加以讨论。附带说明一点，以上提出的任务将是本书讨论的中心内容。

第二节 物理恒量

在力学研究中，人们总希望以某种方式来表示物理量，并希望在以这种方式表示物理量时，要求与坐标系选取无关。

所有与坐标选取无关的物理量，统称为物理恒量。

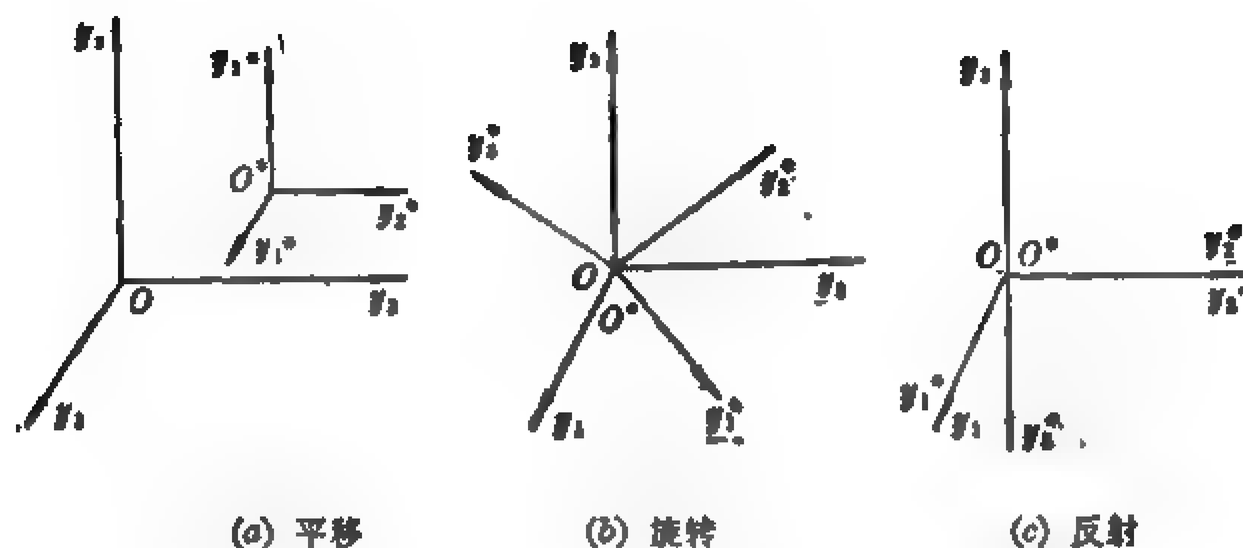
由于物理恒量的概念和坐标系选取有关，而坐标系的不同选取，又可看成坐标系的变换。因此，为了弄清物理恒量的概念，首先要弄清坐标系的变换问题。

这里先以笛卡尔坐标系为例，介绍笛卡尔坐标系变换的有关知识。

任取一笛卡尔坐标系 $Oy_1y_2y_3$[1]。这一坐标系可通过平移、旋转、反射等三种变换形式变换为其他笛卡尔坐标系(图 1-8)。

所谓平移变换，就是各坐标轴方向不变，将坐标系 $Oy_1y_2y_3$ 平行移动到新的位置；旋转变换则不同，旋转变换时原点不动，各坐标轴同时转过一个相同的角度；至于反射变换，其原点和两条坐标

[1] 为讨论方便起见，以 $y_1y_2y_3$ 代替 x、y、z。



(a) 平移　　(b) 旋转　　(c) 反射

图 1-3

轴不动，只是第三条坐标轴转过 180° 角，反射变换后的新坐标系 $O^*y_1^*y_2^*y_3^*$ 和 $Oy_1y_2y_3$ 形成镜面反射，故称反射变换。

对于后两种变换。其特点在于：旋转变换不改变坐标系性质，即原来是左手坐标系经变换后仍为左手坐标系，反之亦然；反射变换则相反，坐标系经反射变换后将改变其性质。旋转变换又称为确当变换；而反射变换则称为不确当变换[1]。

由以上讨论可见，坐标系变换可用是否改变坐标系性质来表征。

必须着重指出，这里讲的坐标变换应当包括以上三种变换在内，但本书不涉及第一种变换。

除此以外，既然讨论涉及物理量，就应当对物理量本身作些探讨。

研究固体力学和流体力学的两个主要任务是：1.根据普遍定律，揭示介质的力学性质；2.建立介质内部应力和应变的关系，即所谓本构关系。无论是前者还是后者，都必须用一些物理量加以表述，例如，以速度和加速度表示介质的运动性质；以温度、密度、

[1] 其实，这两种变换可用 $Oy_1y_2y_3$ 的排列来表征。如 $Oy_1y_2y_3$ 已确定为右手坐标系，则如 1、2、3 按偶排列变换时，必为确当变换，反之为不恰当变换。

应力表示介质的静态性质等。

在这些物理量中，比较熟悉的是温度、密度、速度以及加速度。对于前两者，只有大小没有方向，统称为标量；至于后两者，则既有大小又有方向，通称为矢量，而关于介质中的一点应力，已非熟悉的标量和矢量所能包括的了。

为了加深物理量的理解，先通过对标量、矢量的讨论以及坐标变换的性质，提出绝对标量、绝对矢量的概念，并在此基础上引进张量这一更为概括的名称。

(一) 绝对标量

在一定单位制下，只需指明其大小即足以说明的物理量，统称为标量。流场中流体的密度可以随空间位置和时间变化，但在给定瞬时、给定空间位置，流体密度 ρ 是固定的实数，这一实数值和选取的单位制有关。水在 4℃ 时的密度值可表示为 $1(gm/cm^3)$ 和 $62.427(lb/ft^3)$ 两个不同的数值，然而，它们都代表 4℃ 时水的密度。由此可见，同一密度 ρ，采用不同的单位制，可以有不同的值，但单位制一旦给定，密度值也就给定了。

密度没有方向，谈论密度的方向是没有意义的；密度的大小可能和空间位置有关，但和确定空间位置的方式(即坐标选取)无关。

显然，密度是一种无须指定方向的物理恒量，这种物理恒量又称绝对标量。也有另一类标量，虽然也只有大小没有方向，但当坐标系作反射变换时，此标量的绝对值不变，而符号发生变化，这种标量称伪标量。关于伪标量，将通过实例加以说明。

根据绝对标量的定义，如果设 ϕ 为某一坐标系 (y_1, y_2, y_3) 下的标量，ϕ^* 为另一坐标系 (y_1^*, y_2^*, y_3^*) 下的标量，则

$$\phi(y_1, y_2, y_3)=\phi^*(y_1^*, y_2^*, y_3^*) \qquad (1\text{-}1)$$

式(1-1)为绝对标量 $\phi(y_1, y_2, y_3)$ 的解析定义式。

(二) 绝对矢量

和标量不同，对于矢量，除指明其大小外还应指出其方向。然而，对这类物理量，当所选用的单位制不同时，其大小的实际数值也将不同。

以力 $\boldsymbol{F}$ 为例，它的方向可用某一指定的坐标系确定。如令 α_{F1}、α_{F2}、α_{F3} 为力 $\boldsymbol{F}$ 和 Oy_1、Oy_2、Oy_3 夹角的方向余弦，如图 1-4a 所示，由笛卡尔坐标系 $Oy_1y_2y_3$ 可定出力 $\boldsymbol{F}$ 的方向，而其大小则可由力 $\boldsymbol{F}$ 在此坐标系下的三个投影分量 F_1、F_2、F_3 来确定。

如取另一坐标系 $O^*y_1^*y_2^*y_3^*$（由 $Oy_1y_2y_3$ 经反射变换而得）来表示力 $\boldsymbol{F}$（图 1-4b），由于 $O^*y_1^*$、$O^*y_2^*$ 和 Oy_1、Oy_2 方向相同，$O^*y_3^*$ 和 Oy_3 方向相反，力 $\boldsymbol{F}$ 在 $O^*y_1^*y_2^*y_3^*$ 下的投影分量应当是

$$F_1^*=F_1,\ F_2^*=F_2,\ F_3^*=-F_3 \tag{a}$$

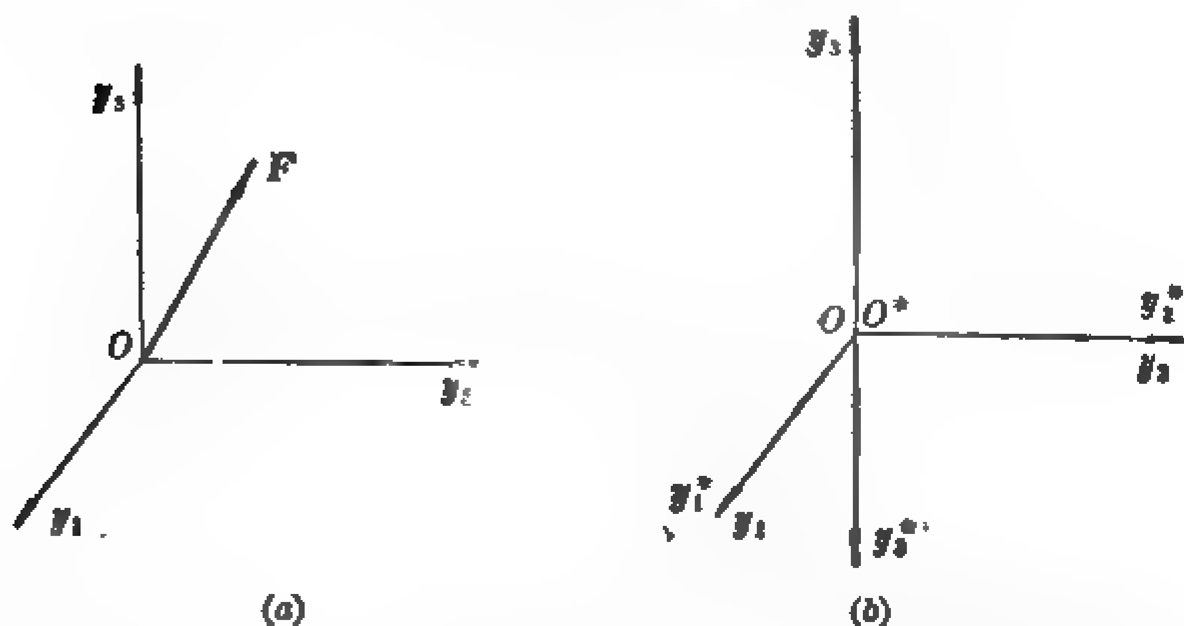


图 1-4

由以上讨论可知，虽然是同一矢量 $\boldsymbol{F}$，但如采用不同坐标系，其投影分量可能不同。

根据矢量定义，如以 $\boldsymbol{u}_1$、$\boldsymbol{u}_2$、$\boldsymbol{u}_3$ 分别代表老坐标轴 Oy_1、Oy_2、Oy_3 的单位矢量；以 $\boldsymbol{u}_1^*$、$\boldsymbol{u}_2^*$、$\boldsymbol{u}_3^*$ 表示新坐标轴 $O^*y_1^*$、$O^*y_2^*$、$O^*y_3^*$ 的单位矢量，则老坐标系下的矢量 $\boldsymbol{F}$ 应是

$$\boldsymbol{F}=F_1\boldsymbol{u}_1+F_2\boldsymbol{u}_2+F_3\boldsymbol{u}_3 \tag{b}$$

新坐标系下的矢量 $\boldsymbol{F}^*$ 应是

$$\boldsymbol{F}^* = F_1^* \boldsymbol{u}_1^* + F_2^* \boldsymbol{u}_2^* + F_2^* \boldsymbol{u}_3^* \tag{c}$$

由图 1-4b 可知

$$\boldsymbol{u}_1^* = \boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2^* = \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_3^* = -\boldsymbol{u}_3 \tag{d}$$

以式(a)、(d)代入式(c)得

$$\boldsymbol{F}^* = \boldsymbol{F}^*(y_1^*,\ y_2^*,\ y_3^*) = \boldsymbol{F}(y_1,\ y_2,\ y_3)$$

上式表明力矢量 $\boldsymbol{F}$ 与坐标选取无关，所有对于和坐标系选取无关的矢量，统称为绝对矢量。以后将会看到，不是所有的矢量都是物理恒量。有一类矢量，在坐标系进行反射变换后，将改变符号，这类矢量统称为伪矢量，将以实例说明。总结以上讨论可得出：

一、绝对矢量是物理恒量。

二、即使是绝对矢量，其投影分量的大小和坐标系选择有关，不指明所采用的单位制谈矢量大小是无意义的；同样，不指明所选用的坐标系谈矢量分量的值也是无意义的。

第三节　物理恒量的充要条件

以上通过绝对标量和绝对矢量的讨论引入物理恒量的概念。现在提出新的问题：满足什么条件才能保证物理量为物理恒量？作为物理恒量的充要条件是什么？

回答这个问题，首先要从矢量的讨论引入。如图 1-5 所示，取笛卡尔坐标系 $O^*y_1^*y_2^*y_3^*$ 及 $Oy_1y_2y_3$，以 α_{11}、α_{12}、α_{13} 分别表示 $O^*y_1^*$ 与Oy_1、Oy_2、Oy_3夹角的方向余弦（其余各轴依此类推），其中第一个下标指定为新坐标轴，第二个下标为老坐标轴；以 A_1、A_2、A_3 表示矢量 $\boldsymbol{A}$ 在老坐标系下的投影分量，以 A_1^*、A_2^*、A_3^* 表示 $\boldsymbol{A}$ 在新坐标系下的投影分量。现在证明

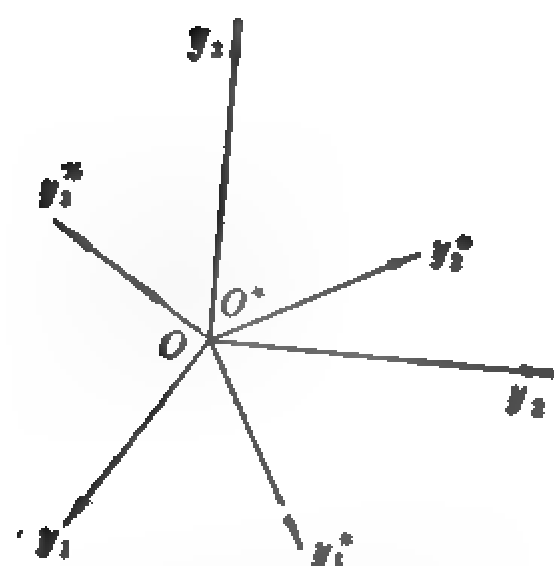


图 1-5

$$\left.\begin{aligned}A_1^* &= \alpha_{11}A_1+\alpha_{12}A_2+\alpha_{13}A_3\\A_2^* &= \alpha_{21}A_1+\alpha_{22}A_2+\alpha_{23}A_3\\A_3^* &= \alpha_{31}A_1+\alpha_{32}A_2+\alpha_{33}A_3\end{aligned}\right\}\tag{1-2}$$

或

$$\begin{bmatrix}A_1^*\\A_2^*\\A_3^*\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha_{11}&\alpha_{12}&\alpha_{13}\\\alpha_{21}&\alpha_{22}&\alpha_{23}\\\alpha_{31}&\alpha_{32}&\alpha_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_1\\A_2\\A_3\end{bmatrix}\tag{1-2$'$}$$

成立，是矢量 $\boldsymbol{A}$ 为物理恒量——绝对矢量的充要条件。

证：如果 $\boldsymbol{A}$ 为绝对矢量，则根据定义

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^*$$

或
$$A_1\boldsymbol{u}_1+A_2\boldsymbol{u}_2+A_3\boldsymbol{u}_3=A_1^*\boldsymbol{u}_1^*+A_2^*\boldsymbol{u}_2^*+A_3^*\boldsymbol{u}_3^*$$

式中 $\boldsymbol{u}_1$、$\boldsymbol{u}_2$、$\boldsymbol{u}_3$ 及 $\boldsymbol{u}_1^*$、$\boldsymbol{u}_2^*$、$\boldsymbol{u}_3^*$ 分别表示新、老坐标系的单位矢量。

以 $\boldsymbol{u}_1^*$ 对上式各项作数性积，得

$$A_1^*=(\boldsymbol{u}_1^*\cdot\boldsymbol{u}_1)A_1+(\boldsymbol{u}_1^*\cdot\boldsymbol{u}_2)A_2+(\boldsymbol{u}_1^*\cdot\boldsymbol{u}_3)A_3$$

已知 $\boldsymbol{u}_1^*\cdot\boldsymbol{u}_1=\alpha_{11}$，$\boldsymbol{u}_1^*\cdot\boldsymbol{u}_2=\alpha_{12}$，$\boldsymbol{u}_1^*\cdot\boldsymbol{u}_3=\alpha_{13}$，于是

$$A_1^*=\alpha_{11}A_1+\alpha_{12}A_2+\alpha_{13}A_3$$

同理，如分别与 $\boldsymbol{u}_2^*$、$\boldsymbol{u}_3^*$ 作数性积，则

$$A_2^* = \alpha_{21}A_1 + \alpha_{22}A_2 + \alpha_{23}A_3$$

$$A_3^* = \alpha_{31}A_1 + \alpha_{32}A_2 + \alpha_{33}A_3$$

由此可证，式(1-2)是矢量 $\boldsymbol{A}$ 为绝对矢量的必要条件。

下面再证明式(1-2)为充分条件，即，如果 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{A}^*$ 各分量满足式(1-2)，则

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^*$$

$\boldsymbol{A}$ 为绝对矢量。

由式
$$\boldsymbol{A}^* = A_1^*\boldsymbol{u}_1^* + A_2^*\boldsymbol{u}_2^* + A_3^*\boldsymbol{u}_3^*$$

将式(1-2)代入上式，得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^* &= (\alpha_{11}A_1 + \alpha_{12}A_2 + \alpha_{13}A_3)\boldsymbol{u}_1^* + (\alpha_{21}A_1 + \alpha_{22}A_2 + \alpha_{23}A_3)\boldsymbol{u}_2^* \\ &\quad + (\alpha_{31}A_1 + \alpha_{32}A_2 + \alpha_{33}A_3)\boldsymbol{u}_3^* \\ &= A_1(\alpha_{11}\boldsymbol{u}_1^* + \alpha_{21}\boldsymbol{u}_2^* + \alpha_{31}\boldsymbol{u}_3^*) + A_2(\alpha_{12}\boldsymbol{u}_1^* + \alpha_{22}\boldsymbol{u}_2^* + \alpha_{32}\boldsymbol{u}_3^*) \\ &\quad + A_3(\alpha_{13}\boldsymbol{u}_1^* + \alpha_{23}\boldsymbol{u}_2^* + \alpha_{33}\boldsymbol{u}_3^*)\end{aligned}$$

由新、老坐标系单位矢量间的关系式

$$\boldsymbol{u}_1 = \alpha_{11}\boldsymbol{u}_1^* + \alpha_{21}\boldsymbol{u}_2^* + \alpha_{31}\boldsymbol{u}_3^*$$

$$\boldsymbol{u}_2 = \alpha_{12}\boldsymbol{u}_1^* + \alpha_{22}\boldsymbol{u}_2^* + \alpha_{32}\boldsymbol{u}_3^*$$

$$\boldsymbol{u}_3 = \alpha_{13}\boldsymbol{u}_1^* + \alpha_{23}\boldsymbol{u}_2^* + \alpha_{33}\boldsymbol{u}_3^*$$

可得
$$\boldsymbol{A}^* = A_1\boldsymbol{u}_1 + A_2\boldsymbol{u}_2 + A_3\boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{A}$$

以上证明了式(1-2)是矢量 $\boldsymbol{A}$ 为绝对矢量的充要条件。式(1-2)为绝对矢量的解析定义式；式中的诸方向余弦称为变换系数。

必须着重指出，式(1-2)是以老分量表示新分量的表达式，通过类似的讨论，也可求得以新分量表示老分量的表示式如下：

$$\left.\begin{aligned}A_1 &= \alpha_{11}A_1^* + \alpha_{21}A_2^* + \alpha_{31}A_3^* \\ A_2 &= \alpha_{12}A_1^* + \alpha_{22}A_2^* + \alpha_{32}A_3^* \\ A_3 &= \alpha_{13}A_1^* + \alpha_{23}A_2^* + \alpha_{33}A_3^*\end{aligned}\right\}$$

为了便于以后讨论，变换系数的下标顺序不变，即第一个下标

为新坐标，第二个下标为老坐标。

由于标量在坐标系中没有分量(或分量就是此标量本身)，因而，把式(1-1)看成绝对标量的解析定义式是很自然的。下面通过若干实例的讨论来加深对物理恒量的理解。

［例题1］ 证明力 $\boldsymbol{F}$ 为一绝对矢量

证：设 F_1、F_2、F_3 为力 $\boldsymbol{F}$ 在老坐标系下的投影分量，由力学知识："一个力在某方向的投影，即等于诸分量在此方向的投影"。现取新坐标系下的 $\boldsymbol{u}_1^*$ 为此方向，则

$$\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u}_1^*=F_1(\boldsymbol{u}_1^*\cdot\boldsymbol{u}_1)+F_2(\boldsymbol{u}_1^*\cdot\boldsymbol{u}_2)+F_3(\boldsymbol{u}_1^*\cdot\boldsymbol{u}_3)$$

或

$$F_1^*=a_{11}F_1+a_{12}F_2+a_{13}F_3$$

通过同样讨论，可求得其他两式。由此可见，力 $\boldsymbol{F}$ 是绝对矢量。这一结果和前面讨论是一致的。

［例题2］ 试证明运动速度 $\boldsymbol{v}$ 和加速度 $\boldsymbol{a}$ 是绝对矢量。

证：表征质点(或流体微团)空间位置的矢量，称位置矢量，并以 $\boldsymbol{r}_P$ 表示，如果质点在空间作运动，则 $\boldsymbol{r}_P$ 应是时间 t 的函数。即

$$\boldsymbol{r}_P=\boldsymbol{r}_P(t)$$

可以证明，位置矢量在新、老坐标系下的分量 y_1^*、y_2^*、y_3^* 和 y_1、y_2、y_3 满足式(1-2)，即位置矢量 $\boldsymbol{r}_P$ 为一绝对矢量。根据笛卡尔坐标系下质点的速度和加速度的定义，可写出

$$v_1=\frac{Dy_1}{Dt};\quad v_1^*=\frac{Dy_1^*}{Dt} \tag{a}$$

$$a_1=\frac{Dv_1}{Dt}=\frac{D^2y_1}{Dt^2};\quad a_1^*=\frac{Dv_1^*}{Dt}=\frac{D^2y_1^*}{Dt^2} \tag{b}$$

其余两式也可分别写出。

由于位置矢量 $\boldsymbol{r}_P$ 是绝对矢量，所以

$$y_1^*=a_{11}y_1+a_{12}y_2+a_{13}y_3$$

代入式(a)，同时注意到 a_{11}、a_{12}、a_{13} 均为常数，于是

$$v_1^*=a_{11}\frac{Dy_1}{Dt}+a_{12}\frac{Dy_2}{Dt}+a_{13}\frac{Dy_3}{Dt}$$

或

$$v_1^*=a_{11}v_1+a_{12}v_2+a_{13}v_3 \tag{c}$$

由此可见，速度 $\boldsymbol{v}$ 是绝对矢量，如以式(c)代入式(b)，同样可得

$$a_1^*=a_{11}a_1+a_{12}a_2+a_{13}a_3$$

因而加速度 $\boldsymbol{a}$ 也是绝对矢量。

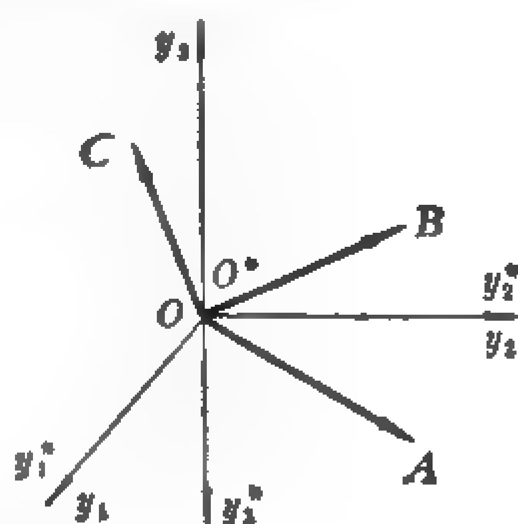


图 1-6

［例题 3］ 试证明三个绝对矢量 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 的数性三重积 $E=\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$ 为伪标量

证：由图 1-6 所示，设新坐标系由老坐标系经反射变换而得。这种变换的变换系数应是

$$a_{11}=1;\quad a_{22}=1;\quad a_{33}=-1 \qquad (a)$$

其余均为零。

由于 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 均为绝对矢量，因而它们的新、老分量满足式(1-2)，计及式(a)，应为

$$\left.\begin{array}{l} A_1^*=A_1,\ A_2^*=A_2,\ A_3^*=-A_3 \\ B_1^*=B_1,\ B_2^*=B_2,\ B_3^*=-B_3 \\ C_1^*=C_1,\ C_2^*=C_2,\ C_3^*=-C_3 \end{array}\right\} \qquad (b)$$

由三个矢量的数性三重积的性质，标量 E 可写成

$$E=\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix};\qquad E^*=\begin{vmatrix} A_1^* & A_2^* & A_3^* \\ B_1^* & B_2^* & B_3^* \\ C_1^* & C_2^* & C_3^* \end{vmatrix}$$

将式(b)代入上式，即得

$$E^*=-E$$

上式表明，三个绝对矢量的数性三重积为一伪标量。

［例题 4］ 证明两绝对矢量 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 的矢性积 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ 是伪矢量

证：和上例相类似，新、老坐标系仍按图 1-6 所示，于是

$$\left.\begin{array}{l} A_1^*=A_1,\ A_2^*=A_2,\ A_3^*=-A_3 \\ B_1^*=B_1,\ B_2^*=B_2,\ B_3^*=-B_3 \end{array}\right\} \qquad (a)$$

由两矢量矢性积定义，可得

$$\left.\begin{array}{l} C_1=A_2B_3-A_3B_2,\ C_1^*=A_2^*B_3^*-A_3^*B_2^* \\ C_2=A_3B_1-A_1B_3,\ C_2^*=A_3^*B_1^*-A_1^*B_3^* \\ C_3=A_1B_2-A_2B_1,\ C_3^*=A_1^*B_2^*-A_2^*B_1^* \end{array}\right\} \qquad (b)$$

将式(a)代入式(b)，即得

$$C_1^* = -C_1,\ C_2^* = -C_2,\ C_3^* = C_3 \tag{c}$$[1]

对于反射变换，单位矢量间满足

$$u_1^* = u_1,\ u_2^* = u_2,\ u_3^* = -u_3 \tag{d}$$

由矢量 $\boldsymbol{C}^*$ 的分解式

$$\begin{aligned}\boldsymbol{C}^* = \boldsymbol{A}^* \times \boldsymbol{B}^* &= C_1^* u_1^* + C_2^* u_2^* + C_3^* u_3^* \\ &= (-C_1) u_1 + (-C_2) u_2 + C_3(-u_3) \\ &= -\boldsymbol{C} = -(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B})\end{aligned}$$

所以，$\boldsymbol{C} = (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B})$ 是伪矢量。

三个矢量的数性积可看成由三个矢量为棱边构成的体积；两个矢量的矢性积可看成由两个矢量为棱边构成的有方向的面积，因而，由以上讨论可见，体积是伪标量，而面积则是伪矢量。

第四节　物理恒量的一般概念

以上介绍了标量和矢量的一般知识，并引进了在笛卡尔坐标系下，这两类物理量为物理恒量的充要条件。引进绝对标量，使能建立起表述温度、密度等空间分布的标量场；引进绝对矢量的概念，又使能以矢量场的概念表述速度和加速度的空间分布。对于标量场，只需用一个实数函数表示；对于矢量场，因为矢量具有三个分量，所以，必须有三个实数函数才能表明。

当希望了解标量场的分布强度时，必须引进标量场梯度的概念。对于标量场的梯度，由于它本身是一个矢量，就要有三个实数函数来描述。如设标量函数为 $\phi(y_1, y_2, y_3)$，则函数 $\phi(y_1, y_2, y_3)$ 之梯度的三个分量应是

$$\frac{\partial \phi}{\partial y_1},\ \frac{\partial \phi}{\partial y_2},\ \frac{\partial \phi}{\partial y_3}$$

---

[1] 式(c)即足以表明矢量 C 不是绝对矢量，因为，如果矢量 C 是绝对矢量，则它们的分量必满足式(1.2)，即应有

$$C_1^* = a_{11} C_1 = C_1,\ C_2^* = a_{22} C_2 = C_2,\ C_3^* = a_{33} C_3 = -C_3$$

如果要了解矢量场中矢量函数的分布强度，由于矢量有三个分量，所以在三维笛卡尔坐标系下，必须有九个实数函数才能表述。以速度矢量 $\boldsymbol{v}$ 为例，这九个实数函数应是

$$\begin{matrix} \frac{\partial v_1}{\partial y_1}, & \frac{\partial v_1}{\partial y_2}, & \frac{\partial v_1}{\partial y_3} \\ \frac{\partial v_2}{\partial y_1}, & \frac{\partial v_2}{\partial y_2}, & \frac{\partial v_2}{\partial y_3} \\ \frac{\partial v_3}{\partial y_1}, & \frac{\partial v_3}{\partial y_2}, & \frac{\partial v_3}{\partial y_3} \end{matrix}$$

只有知道这九个实数函数，才能确定速度矢量场的分布强度。

除此以外，在研究粘性流体或固体中一点的应力时，也常常引进九个实数函数来表示这一点的应力状态；当分析应力场的强度时，应力场的梯度必将有 27 个实数函数作为它的分量。至于在描述各向异性介质的本构关系时，其弹性模量或粘性系数常常要有 81 个分量才能说明，有关知识将在后面介绍。

综合以上讨论，可发现

（一）在讨论力学问题时，仅引进标量和矢量的概念是不够的，有许多物理量已超出标量和矢量的范围，有的是为描写介质物理性质而引进的，有的则是在分析某物理量的空间分布时才引进的。

（二）如以 r 表示维度，以 n 表示幂次，则对于三维空间，这些物理量的分量数可统一表示成

$$r^n$$

其中，

标量只有一个分量，对应于 $n=0$, $r^n=3^0=1$

矢量有三个分量，对应于 $n=1$, $r^n=3^1=3$

应力有九个分量，对应于 $n=2$, $r^n=3^2=9$

应力场梯度有 27 个分量，对应于 $n=3$, $r^n=3^3=27$

弹性模量有81个分量，对应于$n=4$，$r^n=3^4=81$

为了便于讨论，现令n为这些物理量的阶次，并统一称这些物理量为张量。于是，称标量为零阶张量、矢量为一阶张量、应力为二阶张量、应力场梯度为三阶张量、弹性模量为四阶张量。

需要指出的是，二阶以上的张量已不可能象矢量那样有明显的几何意义，但它作为物理恒量，仍可按矢量那样，用分量间的变换关系式来解析定义。如果张量以笛卡尔坐标表示，则称笛卡尔张量或称仿射正交张量。

第五节 矢量的分量和矢量的分解式、基本矢量和倒易基本矢量、矢量的协变分量和矢量的逆变分量

(一) 矢量的分量和矢量的分解式

三维空间中的任一矢量可向不共面的三个任意方向分解。如图1-7所示，矢量$\boldsymbol{A}$可按平行四边形规则，向任意给定的三个不共面的矢量方向(以$\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$、$\boldsymbol{e}_3$表示)分解，即矢量$\boldsymbol{A}$可写成

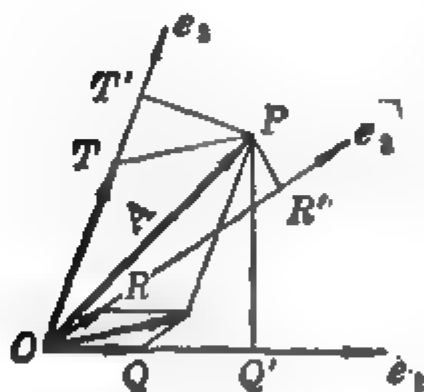


图 1-7

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{OQ}+\boldsymbol{OR}+\boldsymbol{OT} \qquad (1\text{-}8)$$

式(1-8)中的$\boldsymbol{OQ}$、$\boldsymbol{OR}$、$\boldsymbol{OT}$称矢量$\boldsymbol{A}$沿$\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$、$\boldsymbol{e}_3$方向的可分解分量。如以$\boldsymbol{l}_1$、$\boldsymbol{l}_2$、$\boldsymbol{l}_3$表示$\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$、$\boldsymbol{e}_3$三个矢量的单位矢量，即$\boldsymbol{e}_1=|\boldsymbol{e}_1|\boldsymbol{l}_1$，$\boldsymbol{e}_2=|\boldsymbol{e}_2|\boldsymbol{l}_2$，$\boldsymbol{e}_3=|\boldsymbol{e}_3|\boldsymbol{l}_3$，

$$\boldsymbol{OQ}=|\boldsymbol{OQ}|\boldsymbol{l}_1,\quad \boldsymbol{OR}=|\boldsymbol{OR}|\boldsymbol{l}_2,\quad \boldsymbol{OT}=|\boldsymbol{OT}|\boldsymbol{l}_3$$

只要$\boldsymbol{l}_1$、$\boldsymbol{l}_2$、$\boldsymbol{l}_3$给定(或$\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$、$\boldsymbol{e}_3$给定)，则分解式(1-8)是唯一的。

除此以外，也可将矢量 $\boldsymbol{A}$ 向 $\boldsymbol{l}_1$、$\boldsymbol{l}_2$、$\boldsymbol{l}_3$ 方向投影，可得出所谓投影分量 $\boldsymbol{OQ'}$、$\boldsymbol{OR'}$、$\boldsymbol{OT'}$，在 $\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$、$\boldsymbol{e}_3$ 为任意给定时，因为投影分量不满足平行四边形规则，所以不可能用投影分量写出矢量 $\boldsymbol{A}$ 的分解式。

只有当三个方向互成正交时，可分解分量和投影分量重合一致。由于这一原因，对于正交的笛卡尔坐标系不必区别可分解分量和投影分量。

（二）基本矢量和倒易基本矢量

如令式(1-3)中 $\boldsymbol{OQ}=\alpha\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{OR}=\beta\boldsymbol{e}_2$、$\boldsymbol{OT}=\gamma\boldsymbol{e}_3$ 因矢量是按平行四边形规则相加的则(1-3)可改写成

$$\boldsymbol{A}=\alpha\boldsymbol{e}_1+\beta\boldsymbol{e}_2+\gamma\boldsymbol{e}_3 \tag{1-4}$$

或(1-4)也是矢量 $\boldsymbol{A}$ 的分解式，只要 $\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$、$\boldsymbol{e}_3$ 给定，这一分解式也是唯一的。现在的问题是，已知 $\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$、$\boldsymbol{e}_3$ 和 $\boldsymbol{A}$，如何求得 α、β、γ。

为了回答这一问题，任取一笛卡尔坐标系 $Oy_1y_2y_3$，然后将矢量 $\boldsymbol{A}$ 及其可分解分量向坐标轴方向投影，且令 e_{11}、e_{12}、e_{13} 分别表示 $\boldsymbol{e}_1$ 在三个坐标轴方向的投影(余类推)，则有

$$\left.\begin{aligned}A_1&=\alpha e_{11}+\beta e_{21}+\gamma e_{31}\\A_2&=\alpha e_{12}+\beta e_{22}+\gamma e_{32}\\A_3&=\alpha e_{13}+\beta e_{23}+\gamma e_{33}\end{aligned}\right\} \tag{a}$$

显然，式(a)是以 α、β、γ 为未知数的代数方程组，将式(a)中的 α、β、γ 解出，例如，解出 α，则

$$\alpha=\frac{\begin{vmatrix}A_1&A_2&A_3\\e_{21}&e_{22}&e_{23}\\e_{31}&e_{32}&e_{33}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}e_{11}&e_{12}&e_{13}\\e_{21}&e_{22}&e_{23}\\e_{31}&e_{32}&e_{33}\end{vmatrix}}=\frac{\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3)}{\boldsymbol{e}_1\cdot(\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3)}$$

或 $$\alpha=\boldsymbol{A}\cdot\left[\frac{(\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3)}{\boldsymbol{e}_1\cdot(\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3)}\right] \tag{b}$$

由矢量代数可知，$\boldsymbol{e}_1\cdot(\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3)$是以 $\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$、$\boldsymbol{e}_3$ 为棱边构成的斜六面体的体积 V；$\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3$ 是和 $\boldsymbol{e}_2$、$\boldsymbol{e}_3$ 相垂直的某一矢量，因而

$$\left[\frac{(\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3)}{\boldsymbol{e}_1\cdot(\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3)}\right]$$

必然也是矢量，现令其为 $\boldsymbol{e}^1$，于是

$$\boldsymbol{e}^1=\frac{(\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3)}{\boldsymbol{e}_1\cdot(\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3)} \tag{c}$$

注意，此处 $\boldsymbol{e}^1$ 中的“1”是作为标识的上指标，并非幂次。如果分别求出 β、γ，则

$$\beta=\boldsymbol{A}\cdot\left[\frac{\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{e}_1}{\boldsymbol{e}_1\cdot(\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3)}\right]\qquad\gamma=\boldsymbol{A}\cdot\left[\frac{\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2}{\boldsymbol{e}_1\cdot(\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3)}\right]$$

同样，令

$$\boldsymbol{e}^2=\frac{\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{e}_1}{\boldsymbol{e}_1\cdot(\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3)};\qquad\boldsymbol{e}^3=\frac{\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2}{\boldsymbol{e}_1\cdot(\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3)} \tag{d}$$

或统一写成

$$\boldsymbol{e}^k=\frac{\boldsymbol{e}_i\times\boldsymbol{e}_j}{\boldsymbol{e}_1\cdot(\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3)} \tag{1-5}$$

式中 i, j, k 分别取 1, 2, 3，并按偶顺序排列。

利用式(1-5)，则式(a)可改写为

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}^1)\boldsymbol{e}_1+(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}^2)\boldsymbol{e}_2+(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}^3)\boldsymbol{e}_3 \tag{1-6}$$

如已知 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$、$\boldsymbol{e}_3$，则矢量 $\boldsymbol{A}$ 向 $\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$ 及 $\boldsymbol{e}_3$ 方向的分解式，其系数 α、β, γ 可按式(b)一一求得。

式(c)(d) 中的 $\boldsymbol{e}^1$、$\boldsymbol{e}^2$、$\boldsymbol{e}^3$ 称倒易基本矢量，倒易基本矢量的引进，对今后的讨论十分重要。为了较好地理解倒易基本矢量，下面进一步讨论它和基本矢量的一些关系：

一、由式(1-5)以及矢量数性积的性质，不难看出，$\boldsymbol{e}^1$ 垂直于 $\boldsymbol{e}_2$、$\boldsymbol{e}_3$；$\boldsymbol{e}^2$ 垂直于 $\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_3$；$\boldsymbol{e}^3$ 垂直于 $\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$。

二、由式(1-5)不难看出，

$$e_1\cdot e^1=\frac{e_1\cdot(e_2\times e_3)}{e_1\cdot(e_2\times e_3)}=1;\quad e_1\cdot e^2=\frac{e_1\cdot(e_3\times e_1)}{e_1\cdot(e_2\times e_3)}=0$$

依此类推，可得

$$e_2\cdot e^2=1;\quad e_3\cdot e^3=1;\quad e_1\cdot e^3=0;\quad \cdots\cdots$$

或

$$e_i\cdot e^j=\begin{cases}1(i=j)\\0(i\neq j)\end{cases}$$

这一结果和正交单位矢量间

$$u_i\cdot u_j=\begin{cases}1(i=j)\\0(i\neq j)\end{cases}$$

相对应，因此，仿照正交单位矢量，也称 e_i、e^j 具有正交性。

三、如图 1-8 所示，由 e_1、e_2、e_3 构成的体积 V 可表示成

$$V=|e_1||e_2||e_3|\sin\varphi_{12}\cos\theta_{33}$$

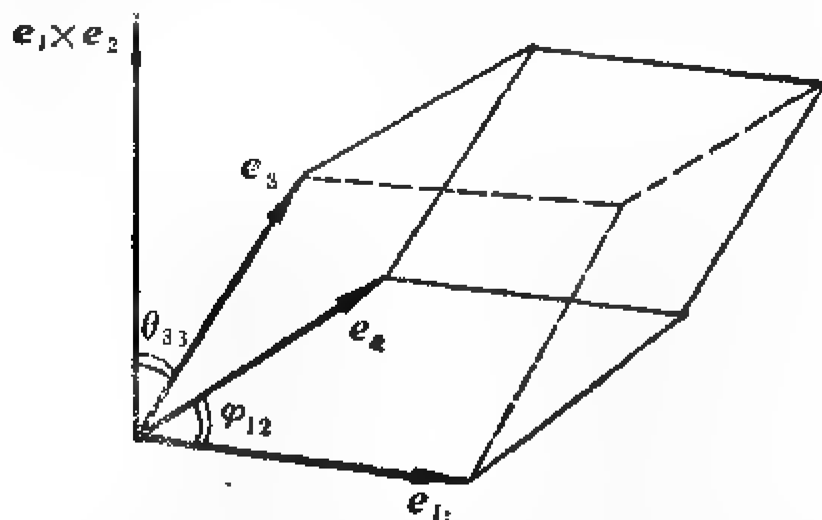


图 1-8

又因

$$e_1\times e_2=|e_1||e_2|\sin\varphi_{12}l^3$$

式中 l^3 为 e^3 方向的单位矢量，φ_{12} 为 e_1、e_2 的夹角，θ_{33} 为 e_3 与 e^3 的夹角。

于是

$$e^3=\frac{e_1\times e_2}{e_1\cdot(e_2\times e_3)}=\frac{l^3}{|e_3|\cos\theta_{33}}$$

类似地有

$$\left.\begin{aligned} |e^3| &= \frac{1}{|e_3|\cos\theta_{33}} \\ |e^1| &= \frac{1}{|e_1|\cos\theta_{11}} \\ |e^2| &= \frac{1}{|e_2|\cos\theta_{22}} \end{aligned}\right\} \tag{1-7}$$

以上讨论可见，和正交情况不同，即使 e_1、e_2、e_3 是单位矢量，由于斜交情况下 θ_{11}、θ_{22}、θ_{33} 不为零，倒易基本矢量并非单位矢量。

四、当 e_1、e_2、e_3 互成正交，则除基本矢量和对应的倒易基本矢量方向一致以外，由式(1-7)立即可由 $\cos\theta_{11}=\cos\theta_{22}=\cos\theta_{33}=1$，得

$$|e^1||e_1|=1;\quad |e^2||e_2|=1;\quad |e^3||e_3|=1$$

即，在正交情况下，倒易基本矢量的模和对应的基本矢量的模互为倒数。

当 e_1、e_2、e_3 互成正交且为单位矢量时（即 $e_1=u_1$、$e_2=u_2$、$e_3=u_3$），得

$$e^1=\frac{e_2\times e_3}{e_1\cdot(e_2\times e_3)}=(e_2\times e_3)=u_2\times u_3=u_1$$

同理，$e^2=u_2$、$e^3=u_3$。

这种特殊情况对应于笛卡尔坐标系的单位矢量，因而，对于笛卡尔坐标系，不必区别基本矢量和倒易基本矢量。

五、若令 V' 为三个倒易基本矢量为棱边的斜六面体体积。

则
$$V'=e^1\cdot(e^2\times e^3)$$

由式(c)及矢量恒等式，得

$$V'=\frac{1}{[e_1\cdot(e_2\times e_3)]^3}\{(e_2\times e_3)\cdot[(e_3\times e_1)\times(e_1\times e_2)]\}$$

$$=\frac{1}{e_1\cdot(e_2\times e_3)}=\frac{1}{V}$$[1]

或
$$V'V=1 \tag{1-8}$$

六、如果将矢量 $\boldsymbol{A}$ 向三个倒易基本矢量方向分解，则由

$$\boldsymbol{A}=\alpha' e^1+\beta' e^2+\gamma' e^3$$

并仿照式(b)，可得

$$\alpha'=\boldsymbol{A}\cdot\frac{e^2\times e^3}{e^1\cdot(e^2\times e^3)};\quad \beta'=\boldsymbol{A}\cdot\frac{e^3\times e^1}{e^1\cdot(e^2\times e^3)}$$

$$\gamma'=\boldsymbol{A}\cdot\frac{e^1\times e^2}{e^1\cdot(e^2\times e^3)}$$

由于

$$e^1\cdot(e^2\times e^3)=V';\quad V'=\frac{1}{V};\quad e^2=\frac{e_3\times e_1}{V},\quad e^3=\frac{e_1\times e_2}{V}$$

因而

$$\frac{e^2\times e^3}{e^1\cdot(e^2\times e^3)}=V\frac{[(e_3\times e_1)\times(e_1\times e_2)]}{V^2}$$

$$=\frac{[e_2\cdot(e_3\times e_1)]e_1-[e_1\cdot(e_3\times e_1)]e_2}{V}$$

已知 $e_2\cdot(e_3\times e_1)=V;\quad e_1\cdot(e_3\times e_1)=0$

于是

$$\frac{e^2\times e^3}{e^1\cdot(e^2\times e^3)}=e_1$$

同理可得

$$\left.\frac{e^3\times e^1}{e^1\cdot(e^2\times e^3)}=e_2;\quad \frac{e^1\times e^2}{e^1\cdot(e^2\times e^3)}=e_3\right\} \tag{1-9}$$

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}\cdot e_1)e^1+(\boldsymbol{A}\cdot e_2)e^2+(\boldsymbol{A}\cdot e_3)e^3 \tag{1-10}$$

---

[1] 关于 $(e_2\times e_3)\cdot[(e_3\times e_1)\times(e_1\times e_2)]$ 的计算

由 $(e_3\times e_1)\times(e_1\times e_2)=(e_1\times e_2)\times(e_1\times e_3)$

$=[e_1\cdot(e_2\times e_3)]e_1-[e_1\cdot(e_1\times e_2)]e_3=e_1[e_1\cdot(e_2\times e_3)]$

于是 $(e_2\times e_3)\cdot[(e_3\times e_1)\times(e_1\times e_2)]=[e_1\cdot(e_2\times e_3)]^2$

以上讨论表明，两种基本矢量是互为倒易的。

(三) 矢量的协变分量、逆变分量、协变物理分量、逆变物理分

综上所述，矢量 $\boldsymbol{A}$ 可向基本矢量方向分解并写出分解式；也可向倒易基本矢量方向分解，同样也可写出分解式。如令

$$A^1=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}^1,\quad A^2=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}^2,\quad A^3=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}^3$$

$$A_1=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}_1,\quad A_2=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}_2,\quad A_3=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}_3$$

或简写成 $A_i=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}_i,\ A^i=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}^i\quad(i=1,\ 2,\ 3)$

于是

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{A}&=A^1\boldsymbol{e}_1+A^2\boldsymbol{e}_2+A^3\boldsymbol{e}_3;\\ \boldsymbol{A}&=A_1\boldsymbol{e}^1+A_2\boldsymbol{e}^2+A_3\boldsymbol{e}^3\end{aligned}\right\}\tag{1-11}$$

式中 A^i ——矢量按基本矢量 $\boldsymbol{e}_i$ 分解时，对应基本矢量 $\boldsymbol{e}_i$ 前的系数为矢量 $\boldsymbol{A}$ 的逆变分量；

A_i——矢量 $\boldsymbol{A}$ 按倒易基本矢量 $\boldsymbol{e}^i$ 分解时，对应倒易基本矢量 $\boldsymbol{e}^i$ 前的系数为矢量 $\boldsymbol{A}$ 的协变分量。

前面曾介绍过，在谈到物理恒量的数值时，必须指明采用的单位制；谈到分量时，必须指明所采用的坐标系。当矢量 $\boldsymbol{A}$ 向斜交方向分解时，还必须指明是按基本矢量方向分解还是向倒易基本矢量方向分解。

如果沿基本矢量 $\boldsymbol{e}_i$ 和倒易基本矢量 $\boldsymbol{e}^i$ 方向分别取单位矢量 $\boldsymbol{l}_i$、$\boldsymbol{l}^i$，则矢量 $\boldsymbol{A}$ 的投影分量 a_i、a^i 可分别表示成

$$a_i=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{l}_i,\quad a^i=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{l}^i\tag{1-12}$$

式中 a_i——矢量 $\boldsymbol{A}$ 在 $\boldsymbol{e}_i$ 方向的投影分量为协变物理分量；

a^i——矢量 $\boldsymbol{A}$ 在 $\boldsymbol{e}^i$ 方向的投影分量为逆变物理分量。

必须指出，在斜交的情况下，矢量 $\boldsymbol{A}$ 不可能按投影分量写出分解式。

第六节　和号$\sum$、克罗尼柯尔记号δ_{ij}、顺序记号ε_{ijk}及其应用

(一) 和号与求和指标

在数学上，为了书写方便，常常把n个实数$a_1, a_2, \cdots, a_n$的求和，写成

$$\sum_{j=1}^{n} a_j$$

和号$\sum$中的下指标表示实数从a_1加到a_n时的第j个实数，由于它只代表求和，因而也可用其他字母代替，例如

$$\sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

如和号$\sum$在和式中只出现一次，就称单和号。

实用上，还会遇到$m\times n$个实数a_{jk}($j=1, 2, \cdots, m$; $k=1, 2, \cdots, n$)的全部求和问题。如果它们的总和是S，那么，此时的和式就不能简单地用单和号$\sum$来表示。为了说明这一点，先将$m\times n$个实数排成下表

$$\begin{matrix} a_{11}, & a_{12}, & \cdots, & a_{1(n-1)}, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \cdots, & a_{2(n-2)}, & a_{2n} \\ & & \vdots & & \\ a_{m1}, & a_{m2}, & \cdots, & a_{m(n-1)}, & a_{mn} \end{matrix}$$

然后按行将n个实数相加，得

$$a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{1n}=\sum_{k=1}^{n} a_{1k}=b_1$$

$$a_{21}+a_{22}+\cdots+a_{2n}=\sum_{k=1}^{n} a_{2k}=b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}+a_{m2}+\cdots+a_{mn}=\sum_{k=1}^{n}a_{mk}=b_m$$

按照总和 S，则应将 m 个实数 b_1, b_2, b_3, $\cdots$, b_m 全部相加，即

$$S=b_1+b_2+\cdots+b_m=\sum_{k=1}^{n}a_{1k}+\sum_{k=1}^{n}a_{2k}+\cdots+\sum_{k=1}^{n}a_{mk}$$

$$=\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{n}a_{jk}\right)$$

除去圆括弧，得

$$S=\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}a_{jk} \tag{1-13}$$

完全类似，如果先按列求和，然后再按行求和，则可得

$$S=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_{jk}=\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}a_{jk} \tag{1-14}$$

上式表明，求和号满足交换律。

除以上的求和式以外，在张量分析中，更广泛地应用到两组实数线性组合的连加式

$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n$$

显然，这一连加式可写成

$$S=\sum_{i=1}^{n}a_ix_i=\sum_{j=1}^{n}a_jx_j=\sum_{k=1}^{n}a_kx_k$$

对于以上的求和式，其指标的功用是求和，这类指标称求和指标或哑指标它可采用任一字母表示。根据爱因斯坦约定，我们可将求和号省去，改写成

$$S=a_ix_i=a_jx_j=a_kx_k \tag{1-15}$$

同理，可将以上结果推广到二次、三次求和，例如

$$S=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}a_{ij}x_ix_j$$

可简写成

$$S=a_{ij}x_ix_j$$

对于三次求和

$$S=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}a_{ijk}x_ix_jx_k=a_{ijk}x_ix_jx_k$$

对于多个数组构成的线性组合求和，求和指标均出现两次，作为一个约定，也只允许出现两次。

（二）自由指标或指定指标

考虑下列连加式 $a_{ij}x_j$，它也表示一线性求和，展开可得

$$S_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=\sum_{j=1}^{3}a_{1j}x_j$$

$$S_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=\sum_{j=1}^{3}a_{2j}x_j$$

$$S_3=a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=\sum_{j=1}^{3}a_{3j}x_j$$

以上三式可统一写成

$$S_i=a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+a_{i3}x_3=\sum_{j=1}^{3}a_{ij}x_j$$

或
$$S_i=a_{ij}x_j$$

如分别令 $i=1$、2、3，则上式分别为 S_1、S_2、S_3，下指标 i 在公式中左右两边只出现一次，实际上只起着指定作用，对于这种指标，统称为指定指标。

这种连加式有很大的实用价值。如将式(1-2)、(1-2)′分别改写为

$$A_i^*=\alpha_{ij}A_j,\quad A_j=\alpha_{ij}A_i^*$$

而新、老坐标系单位矢量间的关系则可表示成

$$u_i^*=\alpha_{ij}u_j,\quad u_j=\alpha_{ij}u_i^*$$

［例题6］ 试将下列各式用指标缩写

1．$d\phi=\dfrac{\partial\phi}{\partial x^1}dx^1+\dfrac{\partial\phi}{\partial x^2}dx^2+\dfrac{\partial\phi}{\partial x^3}dx^3$

2．$(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2$

3．$S=a_{11}x^1x^2+a_{12}x^1x^2+a_{13}x^1x^3+a_{21}x^2x^1+a_{22}x^2x^2+a_{23}x^2x^3$
$\quad+a_{31}x^3x^1+a_{32}x^3x^2+a_{33}x^3x^3$

解：由题意

1. $d\phi=\frac{\partial\phi}{\partial x^1}dx^1+\frac{\partial\phi}{\partial x^2}dx^2+\frac{\partial\phi}{\partial x^3}dx^3=\frac{\partial\phi}{\partial x^i}dx^i$

2. $(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2=x^1x^1+x^2x^2+x^3x^3=x^ix^i$

3. $S=x^1(a_{11}x^1+a_{12}x^2+a_{13}x^3)+x^2(a_{21}x^1+a_{22}x^2+a_{23}x^3)$
$\quad+x^3(a_{31}x^1+a_{32}x^2+a_{33}x^3)$

上式圆括弧中的三项可分别写成

$$a_{1j}x^j,\ a_{2j}x^j,\ a_{3j}x^j$$

故得
$$S=x^1a_{1j}x^j+x^2a_{2j}x^j+x^3a_{3j}x^j=a_{ij}x^ix^j$$

[例题 6] 试将下列各式展开($k=1、2、3$; $q=1、2、3$)

$$a_{jk}x^k,\ A_{pq}A^{qr};\ \frac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{g}A^k)$$

解：以上三式中 k、q 为求和指标，j、p、r 为指定指标，因而

$$a_{jk}x^k=a_{j1}x^1+a_{j2}x^2+a_{j3}x^3$$

$$A_{pq}A^{qr}=A_{p1}A^{1r}+A_{p2}A^{2r}+A_{p3}B^{3r}$$

$$\frac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{g}A^k)=\frac{\partial}{\partial x^1}(\sqrt{g}A^1)+\frac{\partial}{\partial x^2}(\sqrt{g}A^2)+\frac{\partial}{\partial x^3}(\sqrt{g}A^3)$$

引入指定指标与求和指标，除能简化书写以外，还可简化运算。例如，在求证绝对矢量的必要条件时，令

$$A_ju_j=A_i^*u_i^*$$

已知
$$u_j=\alpha_{ij}u_i^*$$

于是
$$A_i^*u_i^*=\alpha_{ij}A_ju_i^*$$

或
$$(A_i^*-\alpha_{ij}A_j)u_i^*=0$$

因
$$u_i^*\neq 0,$$

所以
$$A_i^*=\alpha_{ij}A_j$$

以上说明了两类指标的应用，它将使书写和运算大为简化。但是，必须注意区别各种不同情况，例如：

$a_{ij}x_j$、$a_{ij}x_i$，$a_{ii}x_j$ 是有区别的，这三个求和式可分别展开成

$$a_{ij}x_j=a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+a_{i3}x_3$$

$$a_{ij}x_i=a_{1j}x_1+a_{2j}x_2+a_{3j}x_3$$

$$a_{ii}x_j=(a_{11}+a_{22}+a_{33})x_j$$

至于 $a_{ii}x_i$，根据约定，没有定义。

以上第三式中的 a_{ii}，下指标在同一字母中出现两次，在一般情况下，它是求和指标，但在某些特殊情况下，则是非求和指标，以后如遇到这类非求和指标，将作专门说明。

如果在方程中出现两个指定指标

$$T_{ij}=a_{im}x_{jm}$$

则应包括九个方程：

$$\left.\begin{aligned}T_{11}&=a_{1m}x_{1m}=a_{11}x_{11}+a_{12}x_{12}+a_{13}x_{13}\\T_{12}&=a_{1m}x_{2m}=a_{11}x_{21}+a_{12}x_{22}+a_{13}x_{23}\\&\vdots\\T_{33}&=a_{3m}x_{3m}=a_{31}x_{31}+a_{32}x_{32}+a_{33}x_{33}\end{aligned}\right\}$$

（三）克罗尼柯尔记号 δ_{ij}

δ_{ij} 定义为

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1(i=j)\\0(i\neq j)\end{cases}\tag{1-16}$$

由于 δ_{ij} 有两个下标，因而有九个量。如以矩阵表示，由 δ_{ij} 的定义

$$[\delta_{ij}]=\begin{bmatrix}\delta_{11}&\delta_{12}&\delta_{13}\\\delta_{21}&\delta_{22}&\delta_{23}\\\delta_{31}&\delta_{32}&\delta_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\tag{1-17}$$

δ_{ij} 有下列性质

1．$\delta_{ij}=\delta_{ji}$，即克罗尼柯尔记号的下标可以交换；

2．由 $\delta_{11}=1$，$\delta_{22}=1$，$\delta_{33}=1$ 于是

$$\delta_{11}+\delta_{22}+\delta_{33}=1+1+1=3$$

因 $\delta_{11}+\delta_{22}+\delta_{33}=\delta_{ii}$ 所以

$$\delta_{ii}=3$$

3．δ_{ij} 可简化连加式的书写，由连加式可写成

$$\delta_{1m}a_m=\delta_{11}a_1+\delta_{12}a_2+\delta_{13}a_3=a_1$$

$$\delta_{2m}a_m=\delta_{21}a_1+\delta_{22}a_2+\delta_{23}a_3=a_2$$

$$\delta_{3m}a_m=\delta_{31}a_1+\delta_{32}a_2+\delta_{33}a_3=a_3$$

或统一地写成

$$\delta_{im}a_m=a_i \tag{1-18}$$

4．除此以外，对于连加式，也可类似地写成

$$\delta_{1m}T_{mj}=\delta_{11}T_{1j}+\delta_{12}T_{2j}+\delta_{13}T_{3j}=T_{1j}$$

$$\delta_{2m}T_{mj}=T_{2j}$$

$$\delta_{3m}T_{mj}=T_{3j}$$

或统一写成

$$\delta_{im}T_{mj}=T_{ij} \tag{1-19}$$

特别是，当 $T_{mj}=\delta_{mj}$ 时，则

$$\left.\begin{aligned}&\delta_{im}\delta_{mj}=\delta_{ij}\\&\delta_{ij}\delta_{ij}=\delta_{ii}=3\end{aligned}\right\} \tag{1-20}$$

推而广之

$$\left.\begin{aligned}&\delta_{im}\delta_{mj}\delta_{jn}=\delta_{in}\\&A_rB_s\delta_{sq}=A_rB_q\\&A_{ij}B_j\delta_{ik}=A_{kj}B_j\\&B_jC_kA_s\delta_{rk}\delta_{sj}=B_sC_rA_s=B_jC_rA_j\end{aligned}\right\}$$

以上运算表明，δ_{ij} 起着指标缩减作用，这种运算称指标缩减运算，以后将会看到，张量分析中广泛应用这种运算。

由以上讨论可见，引入 δ_{ij} 的目的，一是进行缩减运算；二是为了简化书写。下面举数例加以说明。

(1) 如令 $\boldsymbol{u}_1$、$\boldsymbol{u}_2$、$\boldsymbol{u}_3$ 为三个互成正交的单位矢量，根据矢量数性积的性质，这三个单位矢量可构成九个表达式(此处不一一列举)，但如采用 δ_{ij}，则这九个表达式可统一写成

$$\boldsymbol{u}_i\cdot\boldsymbol{u}_j=\delta_{ij} \tag{1-21}$$

这就大大简化了书写。

(2) 对于基本矢量和倒易基本矢量，就其性质而言，存在下列关系

$$\boldsymbol{e}^i\cdot\boldsymbol{e}_j=\begin{cases}1(i=j)\\0(i\neq j)\end{cases}$$

上式亦可用 δ^i_j 表示成

$$\boldsymbol{e}^i\cdot\boldsymbol{e}_j=\delta^i_j \tag{1-22}$$

(3) 如有另一组新单位矢量 $\boldsymbol{u}_i^*$，当 $\boldsymbol{u}_i^*$ 向 $\boldsymbol{u}_i$ 方向分解时有，

$$\boldsymbol{u}_i^*=\alpha_{im}\boldsymbol{u}_m$$

式中 α_{im}——第 i 个新单位矢量与第 m 个老单位矢量夹角的方向余弦。由于新单位矢量 $\boldsymbol{u}_i^*$ 也互成正交，所以

$$\boldsymbol{u}_i^*\cdot\boldsymbol{u}_j^*=\delta_{ij}^*=(\alpha_{im}\boldsymbol{u}_m)\cdot(\alpha_{jn}\boldsymbol{u}_n)$$

式中 $\boldsymbol{u}_j^*=\alpha_{jn}\boldsymbol{u}_n$，为了恪守约定，此处的求和指标不能再选用"$m$"。

上式又可改写成

$$\boldsymbol{u}_i^*\cdot\boldsymbol{u}_j^*=\delta_{ij}^*=\alpha_{im}\alpha_{jn}(\boldsymbol{u}_m\cdot\boldsymbol{u}_n)$$

因 $\boldsymbol{u}_m\cdot\boldsymbol{u}_n=\delta_{mn}$，故

$$\alpha_{im}\alpha_{jn}\delta_{mn}=\delta_{ij}^* \tag{1-23}$$

又因

$$\alpha_{jn}\delta_{mn}=\alpha_{jm}(\text{或 }\alpha_{im}\delta_{mn}=\alpha_{in})$$

所以

$$\left.\begin{aligned}\alpha_{im}\alpha_{jm}=\delta_{ij}\\\alpha_{mi}\alpha_{mj}=\delta_{ij}\end{aligned}\right\} \tag{1-24}$$

同理

式(1-24)中的 i、j 为指定指标，实际上代表九个方程。

如式(1-24)中的 $i=j$，且 $i=j=1$，则式(1-24)表示 $\boldsymbol{u}_1^*$ 向 $\boldsymbol{u}_1$、$\boldsymbol{u}_2$、$\boldsymbol{u}_3$ 方向分解后投影分量的平方和，亦即

$$\alpha_{11}^2+\alpha_{12}^2+\alpha_{13}^2=1$$

或

$$\cos^2(\boldsymbol{u}_1^*,\ \boldsymbol{u}_1)+\cos^2(\boldsymbol{u}_1^*,\ \boldsymbol{u}_2)+\cos^2(\boldsymbol{u}_1^*,\ \boldsymbol{u}_3)=1$$

如式(1-24)中的 $i\neq j$，且令 $i=1$，$j=2$，则

$$\alpha_{11}\alpha_{21}+\alpha_{12}\alpha_{22}+\alpha_{13}\alpha_{23}=0$$

或

$$\cos(\boldsymbol{u}_1^*,\ \boldsymbol{u}_1)\cos(\boldsymbol{u}_2^*,\ \boldsymbol{u}_1)+\cos(\boldsymbol{u}_1^*,\ \boldsymbol{u}_2)\cos(\boldsymbol{u}_2^*,\ \boldsymbol{u}_2)$$
$$+\cos(\boldsymbol{u}_1^*,\ \boldsymbol{u}_3)\cos(\boldsymbol{u}_2^*,\ \boldsymbol{u}_3)=\cos(\boldsymbol{u}_1^*,\ \boldsymbol{u}_2^*)=0$$

上式正好是 $\boldsymbol{u}_i^*$ 为正交的条件。由上面讨论可见，引进 δ_{ij} 可使运算大为简化。

值得提出的是，$\boldsymbol{u}_i\cdot\boldsymbol{u}_j=\delta_{ij}$ 可看成 δ_{ij} 的定义式。

[例题7]　试将 $\delta_{ij}\delta_{ij}$ 直接展开，并由此证明

$$\delta_{ij}\delta_{ij}=3$$

证：

由

$$\begin{aligned}\delta_{ij}\delta_{ij}&=\delta_{i1}\delta_{i1}+\delta_{i2}\delta_{i2}+\delta_{i3}\delta_{i3}\\&=(\delta_{11}\delta_{11}+\delta_{21}\delta_{21}+\delta_{31}\delta_{31})+(\delta_{12}\delta_{12}+\delta_{22}\delta_{22}+\delta_{32}\delta_{32})\\&\quad+(\delta_{13}\delta_{13}+\delta_{23}\delta_{23}+\delta_{33}\delta_{33})\end{aligned}$$

根据 δ_{ij} 的定义，可得

$$\delta_{ij}\delta_{ij}=\delta_{11}\delta_{11}+\delta_{22}\delta_{22}+\delta_{33}\delta_{33}=3$$

[例题8]　设新坐标为 y_1^*、y_2^*、y_3^*，老坐标为 y_1、y_2、y_3 其中 $y_i^*=y_i^*(y_1,\ y_2,\ y_3)$，$y_i=y_i(y_1^*,\ y_2^*,\ y_3^*)$ 试求证

$$\frac{\partial y_j^*}{\partial y_k}\ \frac{\partial y_k}{\partial y_i^*}=\delta_{ij}$$

证：由复合函数求导的链法则，得

$$\frac{\partial y_j^*}{\partial y_i^*}=\frac{\partial y_j^*}{\partial y_1}\ \frac{\partial y_1}{\partial y_i^*}+\frac{\partial y_j^*}{\partial y_2}\ \frac{\partial y_2}{\partial y_i^*}+\frac{\partial y_j^*}{\partial y_3}\ \frac{\partial y_3}{\partial y_i^*}=\frac{\partial y_j^*}{\partial y_k}\ \frac{\partial y_k}{\partial y_i^*}$$

由于 y_i^*、y_j^* 是新坐标，它们彼此独立，不存在函数关系，因而

$$\frac{\partial y_j^*}{\partial y_i^*}=\begin{cases}1(i=j)\\0(i\neq j)\end{cases}\quad 或\quad \frac{\partial y_j^*}{\partial y_i^*}=\delta_{ij}$$

于是

$$\frac{\partial y_j^*}{\partial y_k}\ \frac{\partial y_k}{\partial y_i^*}=\delta_{ij}$$

（四）顺序记录 e_{ijk}

在张量分析中得到广泛应用的另一记号是 e_{ijk}。下面先引入

ε_{ijk} 的定义，然后讨论它的性质和用途。

1. ε_{ijk} 的定义

$$\varepsilon_{ijk}=\begin{cases}1 & 当\ i,\ j,\ k\ 为偶排列\\ -1 & 当\ i,\ j,\ k\ 为奇排列\\ 0 & 当\ i,\ j,\ k\ 不成排列\end{cases}$$

根据以上定义，应得

$$\varepsilon_{123}=\varepsilon_{231}=\varepsilon_{312}=1$$

$$\varepsilon_{132}=\varepsilon_{213}=\varepsilon_{321}=-1$$

$$\varepsilon_{112}=\varepsilon_{111}=\cdots=0$$

下列关系成立

$$\varepsilon_{ijk}=\varepsilon_{jki}=\varepsilon_{kij}=-\varepsilon_{jik}=-\varepsilon_{ikj}=-\varepsilon_{kji}$$

也可用下表列出

$k=1$

	$i=1$	2	3
$j=1$	0	0	0
2	0	0	-1
3	0	1	0

$k=2$

	$i=1$	2	3
$j=1$	0	0	1
2	0	0	0
3	-1	0	0

$k=3$

	$i=1$	2	3
$j=1$	0	-1	0
2	1	0	0
3	0	0	0

2. ε_{ijk} 与 δ_{ij} 的关系

由于 ε_{ijk}、δ_{ij} 在张量分析中有着广泛的应用，并在运算中常常要相互换算，因此，下面着重讨论它们之间的一些关系。

由 ε_{ijk} 的定义，可看成 ε_{ijk} 是 $\boldsymbol{u}_i$、$\boldsymbol{u}_j$、$\boldsymbol{u}_k$ 三个互成正交之单位矢量的数性三重积，即

$$\varepsilon_{ijk}=\boldsymbol{u}_i\cdot(\boldsymbol{u}_j\times\boldsymbol{u}_k)$$

或

$$\varepsilon_{ijk}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{u}_i\cdot\boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_i\cdot\boldsymbol{u}_2 & \boldsymbol{u}_i\cdot\boldsymbol{u}_3\\ \boldsymbol{u}_j\cdot\boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_j\cdot\boldsymbol{u}_2 & \boldsymbol{u}_j\cdot\boldsymbol{u}_3\\ \boldsymbol{u}_k\cdot\boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_k\cdot\boldsymbol{u}_2 & \boldsymbol{u}_k\cdot\boldsymbol{u}_3\end{vmatrix}$$

根据 δ_{ij} 的定义式及行列式性质，可将上式改写成

$$
e_{ijk}=\begin{vmatrix}\delta_{1i} & \delta_{1j} & \delta_{1k}\\ \delta_{2i} & \delta_{2j} & \delta_{2k}\\ \delta_{3i} & \delta_{3j} & \delta_{3k}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\delta_{1i} & \delta_{2i} & \delta_{3i}\\ \delta_{1j} & \delta_{2j} & \delta_{3j}\\ \delta_{1k} & \delta_{2k} & \delta_{3k}\end{vmatrix}
$$

同理

$$
e_{pqr}=\begin{vmatrix}\delta_{1p} & \delta_{2p} & \delta_{3p}\\ \delta_{1q} & \delta_{2q} & \delta_{3q}\\ \delta_{1r} & \delta_{2r} & \delta_{3r}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\delta_{1p} & \delta_{1q} & \delta_{1r}\\ \delta_{2p} & \delta_{2q} & \delta_{2r}\\ \delta_{3p} & \delta_{3q} & \delta_{3r}\end{vmatrix} \tag{a}
$$

于是，两顺序号相乘可表示成

$$
e_{ijk}e_{pqr}=\begin{vmatrix}\delta_{1i} & \delta_{2i} & \delta_{3i}\\ \delta_{1j} & \delta_{2j} & \delta_{3j}\\ \delta_{1k} & \delta_{2k} & \delta_{3k}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\delta_{1p} & \delta_{1q} & \delta_{1r}\\ \delta_{2p} & \delta_{2q} & \delta_{2r}\\ \delta_{3p} & \delta_{3q} & \delta_{3r}\end{vmatrix}
$$

此两行列式相乘的结果，以第一行乘第一列为例，得

$$
\delta_{1i}\delta_{1p}+\delta_{2i}\delta_{2p}+\delta_{3i}\delta_{3p}=\delta_{mi}\delta_{mp}
$$

由式(1-20)，即得

$$
\delta_{mi}\delta_{mp}=\delta_{ip}
$$

其他各元素可依此类推，于是得

$$
e_{ijk}e_{pqr}=\begin{vmatrix}\delta_{ip} & \delta_{iq} & \delta_{ir}\\ \delta_{jp} & \delta_{jq} & \delta_{jr}\\ \delta_{kp} & \delta_{kq} & \delta_{kr}\end{vmatrix} \tag{b}
$$

再由式(b)，求得几种特殊情况如下：

(1) $k=r$ 的情况(即对第三个指标作缩减运算)当 $k=r$，则式(b)可改写成

$$
e_{ijk}e_{pqk}=\begin{vmatrix}\delta_{ip} & \delta_{iq} & \delta_{ik}\\ \delta_{jp} & \delta_{jq} & \delta_{jk}\\ \delta_{kp} & \delta_{kq} & \delta_{kk}\end{vmatrix} \tag{c}
$$

因已知 $\delta_{kk}=3$，故

$$e_{ijk}e_{pqk}=\begin{vmatrix}\delta_{ip} & \delta_{iq} & \delta_{ik}\\ \delta_{jp} & \delta_{jq} & \delta_{jk}\\ \delta_{kp} & \delta_{kq} & 3\end{vmatrix}$$

将上式展开，得

$$e_{ijk}\delta_{pqk}=3(\delta_{ip}\delta_{jq}-\delta_{iq}\delta_{jp})-\delta_{kq}(\delta_{ip}\delta_{jk}-\delta_{ik}\delta_{jp})+\delta_{kp}(\delta_{iq}\delta_{jk}-\delta_{ik}\delta_{jq})$$

由式(1-20)，已知

$$\delta_{kq}\delta_{jk}=\delta_{jq},\quad \delta_{kq}\delta_{ik}=\delta_{iq}$$

于是

$$e_{ijk}e_{pqk}=(\delta_{ip}\delta_{jq}-\delta_{iq}\delta_{jp})=\begin{vmatrix}\delta_{ip} & \delta_{iq}\\ \delta_{jp} & \delta_{jq}\end{vmatrix}^{(1)} \tag{1-25}$$

(2) $j=q$, $k=r$ 的情况

当 $j=q$、$k=r$，则

---

(1) 式(1-25)的详细推导，应是

$$e_{ijk}e_{pqk}=e_{ij1}e_{pq1}+e_{ij2}e_{pq2}+e_{ij3}e_{pq3}$$

$$=\begin{vmatrix}\delta_{ip} & \delta_{iq} & \delta_{i1}\\ \delta_{jp} & \delta_{jq} & \delta_{j1}\\ \delta_{1p} & \delta_{1q} & \delta_{11}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\delta_{ip} & \delta_{iq} & \delta_{i2}\\ \delta_{jp} & \delta_{jq} & \delta_{j2}\\ \delta_{2p} & \delta_{2q} & \delta_{22}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\delta_{ip} & \delta_{iq} & \delta_{i3}\\ \delta_{jp} & \delta_{jq} & \delta_{j3}\\ \delta_{3p} & \delta_{3q} & \delta_{33}\end{vmatrix}$$

$$=\delta_{i1}\begin{vmatrix}\delta_{jp} & \delta_{jq}\\ \delta_{1p} & \delta_{1q}\end{vmatrix}+\delta_{i2}\begin{vmatrix}\delta_{jp} & \delta_{jq}\\ \delta_{2p} & \delta_{2q}\end{vmatrix}+\delta_{i3}\begin{vmatrix}\delta_{jp} & \delta_{jq}\\ \delta_{3p} & \delta_{3q}\end{vmatrix}$$

$$+\delta_{j1}\begin{vmatrix}\delta_{ip} & \delta_{iq}\\ \delta_{1p} & \delta_{1q}\end{vmatrix}+\delta_{j2}\begin{vmatrix}\delta_{ip} & \delta_{iq}\\ \delta_{2p} & \delta_{2q}\end{vmatrix}+\delta_{j3}\begin{vmatrix}\delta_{ip} & \delta_{iq}\\ \delta_{3p} & \delta_{3q}\end{vmatrix}$$

$$+(\delta_{11}+\delta_{22}+\delta_{33})\begin{vmatrix}\delta_{ip} & \delta_{iq}\\ \delta_{jp} & \delta_{jq}\end{vmatrix}$$

将上式展开并应用 $\delta_{11}+\delta_{22}+\delta_{33}=3$，则得

$$e_{ijk}e_{pqk}=\delta_{jp}(\delta_{i1}\delta_{1q}+\delta_{i2}\delta_{2q}+\delta_{i3}\delta_{3q})-\delta_{jq}(\delta_{i1}\delta_{1p}+\delta_{i2}\delta_{2p}+\delta_{i3}\delta_{3p})$$

$$+\delta_{ip}(\delta_{j1}\delta_{1q}+\delta_{j2}\delta_{2q}+\delta_{j3}\delta_{3q})-\delta_{iq}(\delta_{j1}\delta_{1p}+\delta_{j2}\delta_{2p}+\delta_{j3}\delta_{3p})$$

$$+3(\delta_{ip}\delta_{jq}-\delta_{jp}\delta_{iq})=(\delta_{ip}\delta_{jq}-\delta_{iq}\delta_{jp})$$

对照式(c)，式(1-25)正好是 δ_{kk} 的子行列式。如果依此推论，当令 $j=q$ 时，则

$$e_{ijk}e_{pjr}=\begin{vmatrix}\delta_{ip} & \delta_{ir}\\ \delta_{kp} & \delta_{kr}\end{vmatrix}=\delta_{ip}\delta_{kr}-\delta_{ir}\delta_{kp}$$

如令 $i=p$，则得

$$e_{ijk}e_{iqr}=\begin{vmatrix}\delta_{jq} & \delta_{jr}\\ \delta_{kq} & \delta_{kr}\end{vmatrix}=\delta_{jq}\delta_{kr}-\delta_{jr}\delta_{kq}$$

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{pjk}=\delta_{ip}\delta_{jj}-\delta_{ij}\delta_{jp}=3\delta_{ip}-\delta_{ip}=2\delta_{ip} \tag{1-26}$$

(3) $i=p,\ j=q,\ k=r$ 的情况

对此，显然是

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk}=2\delta_{ii}=6 \tag{1-27}$$

3．ε_{ijk} 的应用

如果说 δ_{ij} 用以表达两个正交单位矢量的数性积(或基本矢量与倒易基本矢量的数性积)，则 ε_{ijk} 可用以表达它们的矢性积。

(1) $\boldsymbol{u}_i\times\boldsymbol{u}_j$ 的表达式

根据矢量运算知识，三个互成正交的单位矢量，当其中两个作矢性积时，则

$$\boldsymbol{u}_i\times\boldsymbol{u}_j=\begin{cases}\boldsymbol{u}_k & \text{当 } i,\ j, \text{成偶排列时} \quad (k\neq i,\ j)\\ -\boldsymbol{u}_k & \text{当 } i,\ j, \text{成奇排列时} \quad (k\neq i,\ j)\\ 0 & \text{当 } i,\ j, \text{不成排列时}\end{cases}$$

由于 $i,\ j,\ k$ 均等于 1, 2, 3, 因而，以上结果可写出 9 个方程。如采用 ε_{ijk}，则可统一写成

$$\boldsymbol{u}_i\times\boldsymbol{u}_j=\varepsilon_{ijk}\boldsymbol{u}_k \tag{1-28}$$

式(1-28)中的 $i,\ j$ 为指定指标，而 k 为求和指标。

(2) $\boldsymbol{e}_i\times\boldsymbol{e}_j$ 及 $\boldsymbol{e}^i\times\boldsymbol{e}^j$ 的表达式

根据矢量运算的性质以及基本矢量、倒易基本矢量的关系，可得

$$\boldsymbol{e}_i\times\boldsymbol{e}_j=\begin{cases}v\boldsymbol{e}^k & \text{当 } i,\ j,\ k \text{ 成偶排列时}\\ -v\boldsymbol{e}^k & \text{当 } i,\ j,\ k \text{ 成奇排列时}\\ 0 & \text{当 } i,\ j,\ k \text{ 不成排列时}\end{cases}$$

于是

$$\boldsymbol{e}_i\times\boldsymbol{e}_j=\varepsilon_{ijk}v\boldsymbol{e}^k \tag{1-29}$$

$$\boldsymbol{e}^i\times\boldsymbol{e}^j=\varepsilon_{ijk}\frac{1}{v}\boldsymbol{e}_k$$

在某种情况下，人们常引用

$$\epsilon_{ijk}=e_{ijk}V \quad 及 \quad \epsilon^{ijk}=e^{ijk}\frac{1}{V} \qquad (1\text{-}29)'$$

（五） e_{ijk} 和 δ_{ij} 在矢量运算中的应用

为加深这两个记号的理解并熟悉它们的应用，现讨论它们在矢量运算中的作用。

1．正交条件下的矢量代数

(1) 矢量 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 的数性积

在正交坐标系下，矢量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 可表示成

$$\boldsymbol{A}=A_i\boldsymbol{u}_i, \quad \boldsymbol{B}=B_j\boldsymbol{u}_j$$

式中 A_i、B_j 分别表示矢量 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 在正交坐标系 $\boldsymbol{u}_i$ 下的对应投影分量(下同)。于是

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=A_i\boldsymbol{u}_i\cdot B_j\boldsymbol{u}_j=A_iB_j(\boldsymbol{u}_i\cdot\boldsymbol{u}_j)$$

由于

$$\boldsymbol{u}_i\cdot\boldsymbol{u}_j=\delta_{ij}$$

所以

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=A_iB_j\delta_{ij}$$

上式中的 i、j 均为求和指标。如分别对 i、j 求和并展开，应有九项，利用 δ_{ij} 的性质后可缩减为三项。但这样做显得繁琐，如应用缩减运算，利用

$$B_j\delta_{ij}=B_i \quad 或 \quad A_i\delta_{ij}=A_j$$

则

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=A_iB_i=A_jB_j=A_1B_1+A_2B_2+A_3B_3 \qquad (1\text{-}30)$$

(2) 矢性积 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$

令

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$$

以 $\boldsymbol{A}=A_i\boldsymbol{u}_i$、$\boldsymbol{B}=B_j\boldsymbol{u}_j$ 代入上式，得

$$\boldsymbol{C}=A_i\boldsymbol{u}_i\times B_j\boldsymbol{u}_j=A_iB_j(\boldsymbol{u}_i\times\boldsymbol{u}_j)$$

由式(1-28)得

$$\boldsymbol{C}=A_iB_je_{ijk}\boldsymbol{u}_k \qquad (1\text{-}31)$$

如令 $\boldsymbol{C}=C_k\boldsymbol{u}_k$，则

$$C_k=\varepsilon_{ijk}A_iB_j\,(\text{或 } C_i=\varepsilon_{ijk}A_jB_k) \tag{1-31$'$}$$

式(1-31)′中的 k 是指定指标，i、j 是求和指标。因此式(1-31)′代表三个式子，如对 k 展开，令 $k=1$，则

$$\begin{aligned}C_1&=\varepsilon_{ij1}A_iB_j=\varepsilon_{i11}A_iB_1+\varepsilon_{i21}A_iB_2+\varepsilon_{i31}A_iB_3\\&=\varepsilon_{111}A_1B_1+\varepsilon_{211}A_2B_1+\varepsilon_{311}A_3B_1+\varepsilon_{121}A_1B_2\\&\quad+\varepsilon_{221}A_2B_2+\varepsilon_{321}A_3B_2+\varepsilon_{131}A_1B_3+\varepsilon_{231}A_2B_3\\&\quad+\varepsilon_{331}A_3B_3\end{aligned}$$

由 ε_{ijk} 的定义，得

$$\varepsilon_{231}=1,\quad \varepsilon_{321}=-1$$

其余均为零，于是

$$C_1=A_2B_3-A_3B_2$$

同理可得　　$C_2=A_3B_1-A_1B_3$；　$C_3=A_1B_2-A_2B_1$

(3) 三矢量 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 的数性三重积 $\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$

为了计算三矢量的数性三重积，可利用以上结果，令 $\boldsymbol{D}=\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}$ 则

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon_{ijk}B_jC_k\boldsymbol{u}_i,\quad D_i=\varepsilon_{ijk}B_jC_k,$$
$$E=\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{D}=A_iD_i$$

于是

$$E=\varepsilon_{ijk}A_iB_jC_k \tag{1-32}$$

因已知

$$E=\begin{vmatrix}A_1 & A_2 & A_3\\B_1 & B_2 & B_3\\C_1 & C_2 & C_3\end{vmatrix}$$

所以

$$\begin{vmatrix}A_1 & A_2 & A_3\\B_1 & B_2 & B_3\\C_1 & C_2 & C_3\end{vmatrix}=\varepsilon_{ijk}A_iB_jC_k$$

由于矢量 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 是任意选取的，因此，对于任何一个三阶行列式均可缩写成上式。

［例题 9］ 试证矢量 $\boldsymbol{A}$ 的逆变分量 A^1、A^2、A^3 可分别表示成

$$A^1=\frac{\varepsilon_{ijk}A_i e_{2j}e_{3k}}{\varepsilon_{pqr}e_{1p}e_{2q}e_{3r}};\quad A^2=\frac{\varepsilon_{ijk}e_{1i}A_j e_{3k}}{\varepsilon_{pqr}e_{1p}e_{2q}e_{3r}}$$

$$A^3=\frac{\varepsilon_{ijk}e_{1i}e_{2j}A_k}{\varepsilon_{pqr}e_{1p}e_{2q}e_{3r}}$$

证：由

$$A^1=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}^1=\frac{\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3)}{\boldsymbol{e}_1\cdot(\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3)}=\frac{\begin{vmatrix}A_1 & A_2 & A_3\\ e_{21} & e_{22} & e_{23}\\ e_{31} & e_{32} & e_{33}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}e_{11} & e_{12} & e_{13}\\ e_{21} & e_{22} & e_{23}\\ e_{31} & e_{32} & e_{33}\end{vmatrix}}$$

得
$$A^1=\frac{\varepsilon_{ijk}A_i e_{2j}e_{3k}}{\varepsilon_{pqr}e_{1p}e_{2q}e_{3r}}，$$
余类推。

(4) 矢量 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 的矢性三重积 $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$

令 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$；$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}$

则
$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{D}=\varepsilon_{ijk}A_iD_j\boldsymbol{u}_k$$

但
$$D_j=\varepsilon_{lmj}B_lC_m$$

于是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}&=\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmj}A_iB_lC_m\boldsymbol{u}_k=-\varepsilon_{ikj}\varepsilon_{lmj}A_iB_lC_m\boldsymbol{u}_k\\&=-(\delta_{il}\delta_{km}-\delta_{il}\delta_{km})A_iB_lC_m\boldsymbol{u}_k\\&=(\delta_{im}\delta_{kl}-\delta_{il}\delta_{km})A_iB_lC_m\boldsymbol{u}_k\\&=[(\delta_{im}A_i)C_m(\delta_{kl}B_l)-(\delta_{il}B_l)A_i(\delta_{km}C_m)]\boldsymbol{u}_k\\&=[(A_mC_m)B_k-(A_iB_i)C_k]\boldsymbol{u}_k\end{aligned}$$

由于
$$B_k\boldsymbol{u}_k=\boldsymbol{B};\quad C_k\boldsymbol{u}_k=\boldsymbol{C}$$

$$A_mC_m=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C};\quad A_iB_i=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$$

因而

$$\boldsymbol{E}=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{B}-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}\tag{1-33}$$

2. 斜交条件下的矢量代数

在正交条件下的矢量代数，无须区别可分解分量和投影分量；无须区别基本矢量和倒易基本矢量，任一矢量可按单位矢量写出分解式。

斜交情况不同，在斜交情况下应按基本矢量或倒易基本矢量来写分解式，而其矢量的代数运算应按其基本矢量或倒易基本矢量的内在联系来进行。

下面仍针对矢量的一些基本运算进行讨论。

(1) 矢量 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 的数性积

令 $\boldsymbol{A}=A_i\boldsymbol{e}^i$，$\boldsymbol{B}=B^j\boldsymbol{e}_j$ 则

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=A_i\boldsymbol{e}^i\cdot B^j\boldsymbol{e}_j=A_iB^j(\boldsymbol{e}^i\cdot\boldsymbol{e}_j)$$

由式(1-22)可得

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=A_iB^j\delta^i_j=A_iB^i \tag{1-34}$$

上式运算表明，在斜交条件下，仍可应用 δ^i_j 进行指标缩减。

附带说明一点，上面所表示的只是 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 数性积的一种形式，其他几种形式将在后面介绍。

(2) 矢量 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 的矢性积

令
$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} \tag{a}$$

以 $\boldsymbol{A}=A^i\boldsymbol{e}_i$，$\boldsymbol{B}=B^j\boldsymbol{e}_j$ 代入上式，则得

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=A^i\boldsymbol{e}_i\times B^j\boldsymbol{e}_j=A^iB^j(\boldsymbol{e}_i\times\boldsymbol{e}_j) \tag{b}$$

由于
$$\boldsymbol{e}_i\times\boldsymbol{e}_j=\varepsilon_{ijk}v\boldsymbol{e}^k$$

代入式(b)，即得

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{C}=\varepsilon_{ijk}vA^iB^j\boldsymbol{e}^k\\&\boldsymbol{C}=v[(A^2B^3-A^3B^2)\boldsymbol{e}^1+(A^3B^1-A^1B^3)\boldsymbol{e}^2+(A^1B^2-A^2B^1)\boldsymbol{e}^3]\end{aligned}\right\} \tag{1-35}$$

式(1-35)中的第二式，请读者自证。

同理，如以 $\boldsymbol{A}=A_i\boldsymbol{e}^i$、$\boldsymbol{B}=B_j\boldsymbol{e}^j$ 代入式(a)并根据

$$e_{ijk}e_k=\frac{e^i\times e^j}{v'};\quad e^i\times e^j=e_{ijk}v'e_k$$

又可得出

$$C=e_{ijk}v'A_iB_je_k=e_{ijk}\frac{1}{v}A_iB_je_k \tag{1-36}$$

式(1-35)、(1-36)表明，在斜交条件下的矢量 C，既可按基本矢量写成分解式，也可按倒易基本矢量写成分解式。

(3) 数性三重积 $A\cdot(B\times C)$

令 $\quad D=B\times C,\quad E=A\cdot(B\times C)=A\cdot D$

则 $$D^i=D\cdot e^i=\frac{1}{v}e_{ijk}B_jC_k(e_i\cdot e^i)$$

因 $e_i\cdot e^i=1$，所以

$$D^i=e_{ijk}\frac{1}{v}B_jC_k$$

于是得

$$E=A_iD^i=e_{ijk}\frac{1}{v}A_iB_jC_k \tag{1-37}$$

(4) 矢性三重积 $A\times(B\times C)$

为了简化运算，对于矢性三重积，可直接应用表达式

$$A\times(B\times C)=(A\cdot C)B-(A\cdot B)C$$

令 $\quad A\cdot C=A^iC_i,\ A\cdot B=A^iB_i$

即可求得

$$E=A\times(B\times C)=(A^jC_j)B-(A^kB_k)C \tag{1-38}$$

其协变分量

$$E_i=E\cdot e_i=(A^jC_j)(B_ie^i)\cdot e_i-(A^kB_k)(C_ie^i)\cdot e_i$$

$$E_i=A^jC_jB_i-A^kB_kC_i \tag{1-38$'$}$$

第七节　正交线性变换

在笛卡尔正交坐标系下，坐标的变换关系已在前面作了初步讨论，其变换式为

$$y_i^* = \alpha_{ij} y_j \tag{1-39}$$

式中　y_i^*——新坐标

y_j——老坐标

α_{ij}——新老坐标轴夹角的方向余弦。今指定第一个下标为新坐标，第二个下标为老坐标，α_{ij} 为常数但不相等。

由式(1-39)可得

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{ij} &= \frac{\partial y_i^*}{\partial y_j} \\ y_i^* &= \frac{\partial y_i^*}{\partial y_j} y_j \end{aligned}\right\} \tag{1-40}$$

这种从老坐标向新坐标的变换称正变换。反之为反变换。如果新坐标向老坐标变换，则

$$y_j = \alpha_{ij} y_i^* \tag{1-41}$$

注意，α_{ij} 的下标顺序仍按上面规定不变，则

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{ij} &= \frac{\partial y_j}{\partial y_i^*} \\ y_j &= \frac{\partial y_j}{\partial y_i^*} y_i^* \end{aligned}\right\} \tag{1-42}$$

由式(1-40)、(1-42)得

$$\frac{\partial y_j}{\partial y_i^*} = \frac{\partial y_i^*}{\partial y_j} \tag{1-43}$$

除此以外，由式(1-39)、(1-41)还可得

$$y_i^* = \alpha_{ik} y_k \qquad y_j = \alpha_{kj} y_k^*$$

因此

$$y_i^* = \alpha_{ij}\alpha_{kj}y_k^* \tag{1-44}$$

从上式可得

$$\alpha_{ij}\alpha_{kj} = \delta_{ik} \tag{1-44$'$}$$

式(1-44)中的 i、k 是指定指标，j 是求和指标。如果将 i、j、k 分别以1、2、3代入并展开，则可得九个关系式。这九个关系式可用下列矩阵的乘积来表示：

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1-45}$$

我们称矩阵

$$Q = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix}$$

为正变换下的变换系数矩阵，称

$$Q^T = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{bmatrix}$$

为反变换下的变换系数矩阵，由式(1-45)可得

$$QQ^T = I \tag{1-46}$$

式中　I——单位矩阵。

两个变换系数矩阵，其行列式有着明显的几何意义，例如

$$\det Q = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}$$

由于行列式对应各行的元素正好是 u_1^*、u_2^*、u_3^* 向 u_i 方向分解时的三个分量，所以

$$\det Q = u_1^* \cdot (u_2^* \times u_3^*) = \pm 1$$

上式中的正负号取决于 u_i 对 u_i^* 的变换方式，如采用确当变换(旋转变换)取正号；反之，如采用不确当变换(反射变换)则取负号。

由此可见，确当变换和不确当变换可用变换系数矩阵行列式的正负号来表示

除此之外，由式(1-46)，我们还有

$$Q^T = Q^{-1}, \quad Q^{-1} = \frac{[M_{ij}]^T}{\det Q}$$

式中 M_{ij} 为 Q 的余子式，于是，上式又可表示成

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det Q}\begin{bmatrix} \alpha_{22}\alpha_{33}-\alpha_{23}\alpha_{32} & \alpha_{13}\alpha_{32}-\alpha_{12}\alpha_{33} & \alpha_{12}\alpha_{23}-\alpha_{13}\alpha_{22} \\ \alpha_{23}\alpha_{31}-\alpha_{21}\alpha_{33} & \alpha_{11}\alpha_{33}-\alpha_{13}\alpha_{31} & \alpha_{13}\alpha_{21}-\alpha_{11}\alpha_{23} \\ \alpha_{21}\alpha_{32}-\alpha_{22}\alpha_{31} & \alpha_{12}\alpha_{31}-\alpha_{11}\alpha_{32} & \alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{12}\alpha_{21} \end{bmatrix} \tag{1-46'}$$

由于 $\det Q = \pm 1$，因而由上式可得

$$\begin{cases} \alpha_{22}\alpha_{33}-\alpha_{23}\alpha_{32} = \pm\alpha_{11}; \quad \alpha_{23}\alpha_{31}-\alpha_{21}\alpha_{33} = \pm\alpha_{12} \\ \alpha_{21}\alpha_{32}-\alpha_{22}\alpha_{31} = \pm\alpha_{13} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_{32}\alpha_{13}-\alpha_{33}\alpha_{12} = \pm\alpha_{21}; \quad \alpha_{33}\alpha_{11}-\alpha_{31}\alpha_{13} = \pm\alpha_{22} \\ \alpha_{31}\alpha_{12}-\alpha_{32}\alpha_{11} = \pm\alpha_{23} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_{12}\alpha_{23}-\alpha_{13}\alpha_{22} = \pm\alpha_{31}; \quad \alpha_{13}\alpha_{21}-\alpha_{11}\alpha_{23} = \pm\alpha_{32}; \\ \alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{12}\alpha_{21} = \pm\alpha_{33} \end{cases} \tag{1-46''}$$

此处，如 u^* 取恰当变换，则取正号，反之，取负号。

第八节　记号在力学中的应用

记号可以简化书写，这一点已在上面做了介绍。近年来，由于张量分析在力学中的应用日趋广泛，所以在流体力学、固体力学、连续介质力学中出现一些新的记号。为了熟悉这些记号，现介绍如下：

（一）位置矢量、速度和加速度

位置矢量　　$\boldsymbol{r}_p=y_i\boldsymbol{u}_i$

速度　　$\boldsymbol{v}=\frac{Dy_i}{Dt}\boldsymbol{u}_i=v_i\boldsymbol{u}_i$

加速度

$$\boldsymbol{a}=\frac{D\boldsymbol{v}}{Dt}=\frac{Dv_j}{Dt}\boldsymbol{u}_j=\left(\frac{\partial v_j}{\partial t}+v_k\frac{\partial v_j}{\partial y_k}\right)\boldsymbol{u}_j$$

在一些书籍中，常常将 $\frac{\partial v_j}{\partial t}$，$\frac{\partial v_j}{\partial y_k}$ 写成

$$v_{j,t}、\quad v_{j,k}$$

其中第一个下标表示分量，而以逗点分开的指标则表示偏导数，这样，加速度 $\boldsymbol{a}$ 又可表示成

$$\boldsymbol{a}=(v_{j,t}+v_kv_{j,k})\boldsymbol{u}_j$$

（二）哈密尔顿算子 ∇ 和拉普拉斯算子 Δ

由于　$\nabla=\boldsymbol{u}_1\frac{\partial}{\partial y_1}+\boldsymbol{u}_2\frac{\partial}{\partial y_2}+\boldsymbol{u}_3\frac{\partial}{\partial y_3}$，　$\frac{\partial}{\partial y_1}=_{,i}$

因而可简写成

$$\nabla=_{,i}\boldsymbol{u}_i$$

而拉普拉斯算子 Δ 则写成

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial y_2^2}+\frac{\partial^2}{\partial y_3^2}=_{,ii}$$

（三）ϕ 函数的梯度、矢量 A 的散度、旋度

$$\text{grad}\,\phi=\nabla\phi=\phi_{,j}u_j$$

$$\text{div}\,A=A_{i,i}$$

$$\text{rot}\,A=e_{ijk}A_{i,j}u_k$$

以上引进 δ_{ij}、e_{ijk} 的定义，并讨论了一些有关应用方面的知识。由于这两个记号在张量分析中的重要性，下面再举几个实例。

[例题 10] 设 ϕ 是绝对标量，试证 $\text{grad}\,\phi$ 为绝对矢量。

证：由于 ϕ 为绝对标量，所以

$$\phi(y_1,\ y_2,\ y_3)=\phi^*(y_1^*,\ y_2^*,\ y_3^*)$$

根据复合函数求导，得

$$\frac{\partial\phi}{\partial y_1}=\frac{\partial\phi^*}{\partial y_1^*}\frac{\partial y_1^*}{\partial y_1}+\frac{\partial\phi^*}{\partial y_2^*}\frac{\partial y_2^*}{\partial y_1}+\frac{\partial\phi^*}{\partial y_3^*}\frac{\partial y_3^*}{\partial y_1}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial y_2}=\frac{\partial\phi^*}{\partial y_1^*}\frac{\partial y_1^*}{\partial y_2}+\frac{\partial\phi^*}{\partial y_2^*}\frac{\partial y_2^*}{\partial y_2}+\frac{\partial\phi^*}{\partial y_3^*}\frac{\partial y_3^*}{\partial y_2}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial y_3}=\frac{\partial\phi^*}{\partial y_1^*}\frac{\partial y_1^*}{\partial y_3}+\frac{\partial\phi^*}{\partial y_2^*}\frac{\partial y_2^*}{\partial y_3}+\frac{\partial\phi^*}{\partial y_3^*}\frac{\partial y_3^*}{\partial y_3}$$

将上三式左右两边分别乘以 u_1、u_2、u_3，然后相加，则得

$$\begin{aligned}\text{grad}\,\phi=&\frac{\partial\phi^*}{\partial y_1^*}\left(\frac{\partial y_1^*}{\partial y_1}u_1+\frac{\partial y_1^*}{\partial y_2}u_2+\frac{\partial y_1^*}{\partial y_3}u_3\right)\\&+\frac{\partial\phi^*}{\partial y_2^*}\left(\frac{\partial y_2^*}{\partial y_1}u_1+\frac{\partial y_2^*}{\partial y_2}u_2+\frac{\partial y_2^*}{\partial y_3}u_3\right)\\&+\frac{\partial\phi^*}{\partial y_3^*}\left(\frac{\partial y_3^*}{\partial y_1}u_1+\frac{\partial y_3^*}{\partial y_2}u_2+\frac{\partial y_3^*}{\partial y_3}u_3\right)\end{aligned}$$

对照式(1-40)以及 u_i^*、u_i 之间的关系式，发现上式中圆括号内的三项之和分别等于 u_1^*、u_2^*、u_3^*。于是，上式可改写成

$$\text{grad}\,\phi=\frac{\partial\phi^*}{\partial y_1^*}u_1^*+\frac{\partial\phi^*}{\partial y_2^*}u_2^*+\frac{\partial\phi^*}{\partial y_3^*}u_3^*$$

或

$$\phi_{,i}u_i=\phi^*_{,i}u_i^*$$

由此得证。

显然，以上证明比较繁琐。如果利用绝对矢量的充要条件以及求和指标，其推导要简单得多，现导出如下：

对于新坐标，$\text{grad}\,\phi^*$ 的第 i 个分量应是

$$\frac{\partial \phi^*}{\partial y_i^*}$$

因此
$$\frac{\partial \phi^*}{\partial y_i^*}=\frac{\partial \phi}{\partial y_j}\frac{\partial y_j}{\partial y_i^*}=a_{ij}\frac{\partial \phi}{\partial y_j}$$

或
$$(\mathrm{grad}\,\phi^*)_i=a_{ij}(\mathrm{grad}\,\phi)_j$$

上式表明，grad ϕ 的分量满足 grad ϕ 为绝对矢量的充要条件，因而 grad ϕ 是绝对矢量。

［例题 11］ 设 $\boldsymbol{A}$ 为绝对矢量，试证 div $\boldsymbol{A}$ 为绝对标量。

证：由 div $\boldsymbol{A}$ 的表达式，可得

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}=\frac{\partial A_1}{\partial y_1}+\frac{\partial A_2}{\partial y_2}+\frac{\partial A_3}{\partial y_3}$$

利用复合函数求偏导数的链法则以及式(1-40)，得

$$\frac{\partial A_1}{\partial y_1}=\frac{\partial A_1}{\partial y_1^*}a_{11}+\frac{\partial A_1}{\partial y_2^*}a_{21}+\frac{\partial A_1}{\partial y_3^*}a_{31}$$

$$\frac{\partial A_2}{\partial y^2}=\frac{\partial A_2}{\partial y_1^*}a_{12}+\frac{\partial A_2}{\partial y_2^*}a_{22}+\frac{\partial A_2}{\partial y_3^*}a_{32}$$

$$\frac{\partial A_3}{\partial y_3}=\frac{\partial A_3}{\partial y_1^*}a_{13}+\frac{\partial A_3}{\partial y_2^*}a_{23}+\frac{\partial A_3}{\partial y_3^*}a_{33}$$

于是

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}=\frac{\partial}{\partial y_1^*}(a_{11}A_1+a_{12}A_2+a_{13}A_3)$$
$$+\frac{\partial}{\partial y_2^*}(a_{21}A_1+a_{22}A_2+a_{23}A_3)$$
$$+\frac{\partial}{\partial y_3^*}(a_{31}A_1+a_{32}A_2+a_{33}A_3)$$

注意，求得上式时，利用了 a_{ij} 为常数的条件。

由于假定 $\boldsymbol{A}$ 为绝对矢量，因而上式中圆括号内各项之和分别等于 A_1^*, A_2^*, A_3^*, 于是

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}=\frac{\partial A_1^*}{\partial y_1^*}+\frac{\partial A_2^*}{\partial y_2^*}+\frac{\partial A_3^*}{\partial y_3^*}=\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}^*$$

或
$$A_{i,i}=A_{j,j}^*$$

即 div$\boldsymbol{A}$ 为绝对标量。

下面再利用记号法求证。由于 $\boldsymbol{A}$ 为绝对矢量，所以

$$A_i^*=a_{ij}A_j$$

于是
$$\frac{\partial A_i^*}{\partial y_i^*}=\alpha_{ik}\frac{\partial A_k}{\partial y_j}\frac{\partial y_j}{\partial y_i^*}$$

式中 i、j、k 均系求和指标，而 $\frac{\partial y_j}{\partial y_i^*}=\alpha_{ij}$，则得

$$\frac{\partial A_i^*}{\partial y_i^*}=\alpha_{ik}\alpha_{ij}\frac{\partial A_k}{\partial y_j}=\delta_{kj}\frac{\partial A_k}{\partial y_j}=\frac{\partial A_k}{\partial y_k}$$

或
$$A_{i,i}^*=A_{k,k}$$

注意：推导上式时，曾利用正交条件 $\alpha_{ik}\alpha_{ij}=\delta_{kj}$，并进行了缩减运算。

[例题 12] 设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为绝对矢量，试证两矢量的数性积 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ 为绝对标量

证：由于 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 均为绝对矢量，所以

$$A_i^*=\alpha_{ij}A_j;\quad B_i^*=\alpha_{ik}B_k$$

于是
$$\boldsymbol{A}^*\cdot\boldsymbol{B}^*=A_i^*B_i^*=\alpha_{ij}\alpha_{ik}A_jB_k$$

已知
$$\alpha_{ij}\alpha_{ik}=\delta_{jk}$$

则
$$\boldsymbol{A}^*\cdot\boldsymbol{B}^*=\delta_{jk}A_jB_k=A_jB_j=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$$

作为特例，如令 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$，则

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|^2$$

这一结果是很明显的，矢量 $\boldsymbol{A}$ 的模不可能因坐标变换有所改变。除此之外，由两矢量数性积定义

$$\boldsymbol{A}^*\cdot\boldsymbol{B}^*=|\boldsymbol{A}^*||\boldsymbol{B}^*|\cos(\boldsymbol{A}^*,\ \boldsymbol{B}^*)$$
$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\cos(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B})$$

根据以上结果，可证明

$$\cos(\boldsymbol{A}^*,\ \boldsymbol{B}^*)=\cos(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B})$$

即两绝对矢量夹角的方向余弦也不因坐标变换而改变。

[例题 13] 如矢量 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$，为绝对矢量，则三矢量的矢性二重积为绝对矢量。

证：由三矢量的矢性二重积，可得

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{B}-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}$$

已知 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 为绝对矢量，因而

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}^*\cdot\boldsymbol{C}^*;\quad \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^*\cdot\boldsymbol{B}^*;\quad \boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}^*;\boldsymbol{C}=\boldsymbol{C}^*$$

则上式可改写为

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}^*\cdot\boldsymbol{C}^*)\boldsymbol{B}^*-(\boldsymbol{A}^*\cdot\boldsymbol{B}^*)\boldsymbol{C}^*$$

所以 $$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{A}^*\times(\boldsymbol{B}^*\times\boldsymbol{C}^*)$$

即 $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$为绝对矢量。

因为 $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$必和 $\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 共平面，$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$可用 $\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 表示，$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 为绝对矢量，因而 $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$也是绝对矢量。

[例题 14] 试证

$$\varepsilon_{ijk}\alpha_{pi}\alpha_{qj}\alpha_{rk}=\varepsilon_{pqr}\det Q$$

证：将下式

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}=\varepsilon_{ijk}A_iB_jC_k$$

稍加代换，即令

$$A_1=\alpha_{11},\quad A_2=\alpha_{12},\quad A_3=\alpha_{13};$$
$$B_1=\alpha_{21},\quad B_2=\alpha_{22},\quad B_3=\alpha_{23};$$
$$C_1=\alpha_{31},\quad C_2=\alpha_{32},\quad C_3=\alpha_{33}。$$

则有

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}=\varepsilon_{ijk}\alpha_{1i}\alpha_{2j}\alpha_{3k}$$

如令左边行列式为 $\det Q$，则

$$\det Q=\varepsilon_{ijk}\alpha_{1i}\alpha_{2j}\alpha_{3k}$$

根据行列式性质，必有

$$\varepsilon_{ijk}\alpha_{2i}\alpha_{1j}\alpha_{3k}=-\det Q$$
$$\varepsilon_{ijk}\alpha_{1i}\alpha_{1j}\alpha_{3k}=0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

由此可见，行列式诸元素第一个下标的选取，其顺序也符合顺序号规律，因而有

$$\varepsilon_{ijk}\alpha_{pi}\alpha_{qj}\alpha_{rk}=\varepsilon_{pqr}\det Q$$

第九节　关于伪标量、伪矢量的进一步讨论

在第三节中，我们讨论了绝对标量、绝对矢量的充要条件并引

进了两个实例。这两个实例都是通过某一特殊的反射变换来说明其伪性的，因而，难以说明其普遍性，为了用普遍的方法来判断标量和矢量的伪性，下面从一般变换式加以讨论

仍假定 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 为绝对矢量，因而，对第三例必有

$$E^* = \boldsymbol{A}^* \cdot (\boldsymbol{B}^* \times \boldsymbol{C}^*) = e_{ijk} A_i^* B_j^* C_k^*$$

$$= e_{ijk} \alpha_{ip} \alpha_{jq} \alpha_{kr} A_p B_q C_r$$

但已知 $$e_{ijk} \alpha_{ip} \alpha_{jq} \alpha_{rk} = e_{pqr} \det Q$$

因而 $$E^* = (\det Q) e_{pqr} A_p B_q C_r$$

由于 $$e_{pqr} A_p B_q C_r = E$$

于是 $$E^* = (\det Q) E \tag{1-47}$$

对于第四例，则有

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = e_{pqr} A_p B_q \boldsymbol{u}_r$$

$$\boldsymbol{C}^* = \boldsymbol{A}^* \times \boldsymbol{B}^* = e_{ijk} A_i^* B_j^* \boldsymbol{u}_k^*$$

由 $$A_i^* = \alpha_{ip} A_p, \quad B_j^* = \alpha_{jq} B_q, \quad \boldsymbol{u}_k^* = \alpha_{kr} \boldsymbol{u}_r$$

于是 $$\boldsymbol{C}^* = e_{ijk} \alpha_{ip} \alpha_{jq} \alpha_{kr} A_p B_q \boldsymbol{u}_r$$

或

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{C}^* &= (\det Q) \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{A}^* \times \boldsymbol{B}^* &= (\det Q)(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \end{aligned}\right\} \tag{1-48}$$

根据式(1-47)、式(1-48)，如采用恰当变换，则由于 $\det Q = 1$，我们有

$$E^* = E; \quad \boldsymbol{C}^* = \boldsymbol{C}$$

如采用不恰当变换，则

$$E^* = -E; \quad \boldsymbol{C}^* = -\boldsymbol{C}。$$

对于前者，绝对标量(绝对矢量)与伪标量(伪矢量)并无区别；对于后者，则差一符号。

依照以上讨论，作为伪矢量的 $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ 之分量 C_1、C_2、C_3 (老坐标)及 C_1^*、C_2^*、C_3^* (新坐标)的关系应是

$$C_i^* = (\det Q)\alpha_{ij}C_j$$

习　　题

1-1　试证绝对矢量的和(或差)仍为绝对矢量。

1-2　试直接应用反射变换，证明两绝对矢量 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 的数性积为绝对标量。

1-3　试应用求和指标及指定指标，表示下列各式：

(a) $\dfrac{Dx^{*k}}{Dt} = \dfrac{\partial x^{*k}}{\partial x^1}\dfrac{Dx^1}{Dt} + \dfrac{\partial x^{*k}}{\partial x^2}\dfrac{Dx^2}{Dt} + \dfrac{\partial x^{*k}}{\partial x^3}\dfrac{Dx^3}{Dt}$;

(b) $a_1x^1x^3 + a_2x^2x^3 + a_3x^3x^3$;

(c) $A_1^iB^1 + A_2^iB^2 + A_3^iB^3$;

(d) $A^{21}B_1 + A^{22}B_2 + A^{23}B_3$;

(e) $g^{21}g_{11} + g^{22}g_{21} + g^{23}g_{31}$;

(f) $B_{11}^{121} + B_{12}^{122} + B_{21}^{221} + B_{22}^{222}$。

1-4　试将下列各项展开($k=1,\ 2,\ 3;\ j=1,\ 2,\ 3$)。

(a) $\dfrac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{g}\,A^k)$;

(b) $A^{jk}B_k^pC_{jp}$;

(d) $A^i\Gamma_{ik}^j$;

(e) $\dfrac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x^i}$。

1-5　设 a_k 为正常数，试指出 $a_k(y_k)^2 = a_ky_ky_k = 1$ 在下列情况下所表示的轨迹。

(a)$k=1,\ 2$;　(b)$k=1,\ 2,\ 3$。

1-6　试应用指标法证明：

(a) $(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D}) = (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})(\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{B}) - (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{D})(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})$;

(b) $(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})\cdot[(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})] = [\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})]^2$;

(c) $(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = [\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}]\boldsymbol{A}$。

1-7　证明：如果 $\varepsilon_{ijk}T_{jk}=0$，则 $T_{jk}=T_{kj}$。

1-8　试写出下列几种情况下的变换系数矩阵，并求其行列式值。

(a) $u_1^* = -u_1$;　$u_2^* = -u_2$;　$u_3^* = u_3$。

(b) $u_1^* = u_2$;　$u_2^* = -u_1$;　$u_3^* = u_3$。

(c) $u_1^* = u_2$;　$u_2^* = u_3$;　$u_3^* = u_1$。

第二章　二阶仿射正交张量

上一章讨论了一些预备知识，并引进了张量这一名称；这一章将涉及正交笛卡尔坐标系下二阶张量的有关知识。

张量的阶次已在第一章中提及，此处不再重复。至于正交，则表示所采用的坐标系是正交的笛卡尔坐标系（坐标轴夹角为 90°，如坐标轴夹角不等于 90°，则称斜交笛卡尔坐标系）。

这里提到的“仿射”，指的是变换系数属仿射性质。现通过实例说明它的概念。

已知方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{a}$$

是椭圆方程的标准式，如令椭圆面积为 S，则 S 可以下列积分表示：

$$S=\iint dxdy$$

要求得上述积分，就要应用高等数学知识作某些积分运算，但如果将坐标 x, y 按下式

$$x=ax^*,\quad y=by^*$$

加以变换，则方程(a)在新坐标系下化为

$$(x^*)^2+(y^*)^2=1 \tag{b}$$

而
$$dx=adx^*,\quad dy=bdy^*$$

则
$$S=ab\iint dx^*dy^*$$

由于方程(b)实际上是单位圆方程的标准式，因而

$$\iint dx^* dy^* = \pi$$

于是
$$S = ab\iint dx^* dy^* = \pi ab$$

以上例子生动地说明，对于这一类的问题应用变换式 $x = ax^*$、$y = by^*$ 可避免繁琐的积分运算，这种变换的特点是，变换系数为常数，但互不相等，这相当于笛卡尔坐标的放大（或缩小）的比例各不相等，这一类变换称之为仿射变换。如果变换系数为常数，且相等，则称相似变换。

根据这一概念，本章将要讨论的张量应是二阶的在正交笛卡尔坐标系下仿射变换的张量。

第一节　二阶仿射正交张量的定义式及实例

（一）二阶仿射正交张量的定义式

为了便于表述，现从大家熟悉的工程力学问题出发，引出二阶仿射正交张量定义式。

设在运动的粘性流体或静止的弹性体中，任取一微元四面体

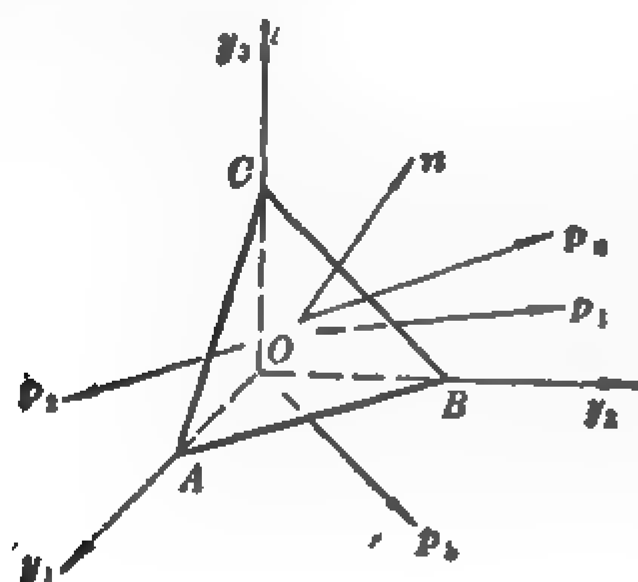


图 2-1

$OABC$(图 2-1)。

令 $\Delta ABC=\Delta S_n$，其法向单位矢量为 $\boldsymbol{n}$，ΔS_1、ΔS_2、ΔS_3 分别表示ΔOBC、ΔOAC、ΔOAB 的面积，则

$$\left.\begin{aligned}&\Delta S_1=\Delta S_n\alpha_{n1},\ \Delta S_2=\Delta S_n\alpha_{n2}\\&\Delta S_3=\Delta S_n\alpha_{n3}\end{aligned}\right\}\tag{a}$$

式中 α_{n1}、α_{n2}、α_{n3} 分别表示 $\boldsymbol{n}$ 和 Oy_1、Oy_2、Oy_3 夹角的方向余弦。

作用在 $OABC$ 上的力，除表面力以外还有质量力(包括惯性力)。根据定义，表面力和作用表面有关，而质量力与微元体的质量有关。当微元体积 $OABC$ 无限收缩时，质量力和表面力相比为高阶无穷小。当假定 $OABC$ 向 O 点收缩时，质量力可忽略不计，只需计及表面力。除此以外，既然是粘性流体(或弹性体)，因而切应力存在，表面力不和作用面垂直。

令作用在各对应表面上的应力分别为 $\boldsymbol{p}_n$、$\boldsymbol{p}_1$、$\boldsymbol{p}_2$、$\boldsymbol{p}_3$，由于表面 ΔABC 的外法线方向与所取的 $\boldsymbol{n}$ 方向相一致，故表面力取正号，为 $\Delta S_n\boldsymbol{p}_n$；其他三个面则不同，它们的外法线方向和所取的坐标轴方向相反，因而这三个面上的表面力应取负号，即分别为

$$-\Delta S_1\boldsymbol{p}_1、\ -\Delta S_2\boldsymbol{p}_2、\ -\Delta S_3\boldsymbol{p}_3$$

根据达朗勃原理，由于质量力(包括惯性力)略去不计，所以 $OABC$ 的力平衡方程应是

$$\Delta S_n\boldsymbol{p}_n-\Delta S_1\boldsymbol{p}_1-\Delta S_2\boldsymbol{p}_2-\Delta S_3\boldsymbol{p}_3=0$$

或

$$\Delta S_n\boldsymbol{p}_n=\Delta S_1\boldsymbol{p}_1+\Delta S_2\boldsymbol{p}_2+\Delta S_3\boldsymbol{p}_3$$

上式左右两边同时除以 ΔS_n，并注意到

$$\frac{\Delta S_1}{\Delta S_n}=\alpha_{n1},\quad \frac{\Delta S_2}{\Delta S_n}=\alpha_{n2},\quad \frac{\Delta S_3}{\Delta S_n}=\alpha_{n3}$$

可得

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{p}_n=\alpha_{n1}\boldsymbol{p}_1+\alpha_{n2}\boldsymbol{p}_2+\alpha_{n3}\boldsymbol{p}_3\\ \text{或}\quad&\boldsymbol{p}_n=\alpha_{ni}\boldsymbol{p}_i\end{aligned}\right\}\tag{2-1}$$

式中　$\boldsymbol{p}_i$——作用在外法线方向为"i"之表面上的应力，
显然，这一应力又可向 Oy_1、Oy_2、Oy_3 三个方向分解。由于所取的是笛卡尔坐标系，所以

$$\boldsymbol{p}_i = p_{ij}\boldsymbol{u}_j, \quad p_{ij} = \boldsymbol{p}_i \cdot \boldsymbol{u}_j \tag{2-2}$$

式中　p_{ij} 的第一个下标表示该应力的作用面外法线方向，而第二个下标则代表该应力的指向。

应用式(2-2)，可将式(2-1)改写成

$$\boldsymbol{p}_n = \alpha_{ni} p_{ij} \boldsymbol{u}_j$$

$$p_{nj} = \alpha_{ni} p_{ij} \tag{2-3}$$

式(2-3)给出过点 O、外法线为 $\boldsymbol{n}$ 的表面上应力 $\boldsymbol{p}_n$ 与三个坐标面上九个应力的关系，这一关系式说明只要知道三个坐标面上的九个应力和外法线 $\boldsymbol{n}$，即可求得此面上的应力 $\boldsymbol{p}_n$。

现假定 $\boldsymbol{p}_n$ 向另一坐标系 $\boldsymbol{u}_m^*$ 方向投影，则

$$p_{nm}^* = \boldsymbol{p}_n \cdot \boldsymbol{u}_m^* = \alpha_{ni} p_{ij} (\boldsymbol{u}_j \cdot \boldsymbol{u}_m^*)$$

令

$$\boldsymbol{u}_m^* \cdot \boldsymbol{u}_j = \alpha_{mj}$$

则新、老坐标系下，应力分量 p_{nm}^* 和 p_{ij} 间的变换关系式为

$$p_{nm}^* = \alpha_{ni} \alpha_{mj} p_{ij} \tag{2-4}$$

式中　n、m 是指定指标，i、j 是求和指标。如分别令 n、m 等于1、2、3，可证式(2-4)包含有九个关系式。

例如，令　$n=1$，$m=2$，则

$$\begin{aligned} p_{12}^* &= \alpha_{1i}[\alpha_{21} p_{i1} + \alpha_{22} p_{i2} + \alpha_{23} p_{i3}] \\ &= \alpha_{11}[\alpha_{21} p_{11} + \alpha_{22} p_{12} + \alpha_{23} p_{13}] \\ &\quad + \alpha_{12}[\alpha_{21} p_{21} + \alpha_{22} p_{22} + \alpha_{23} p_{23}] \\ &\quad + \alpha_{13}[\alpha_{21} p_{31} + \alpha_{22} p_{32} + \alpha_{23} p_{33}] \end{aligned}$$

如果所有新、老坐标系下的诸元素用矩阵表示，则

$$[p_{nm}^*] = [\alpha_{ni}][p_{ij}][\alpha_{jm}]$$

或
$$
\begin{bmatrix} p_{11}^* & p_{12}^* & p_{13}^* \\ p_{21}^* & p_{22}^* & p_{23}^* \\ p_{31}^* & p_{32}^* & p_{33}^* \end{bmatrix}
=\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{bmatrix} \tag{2-5}
$$

如令

$$
p^*=\begin{bmatrix} p_{11}^* & p_{12}^* & p_{13}^* \\ p_{21}^* & p_{22}^* & p_{23}^* \\ p_{31}^* & p_{32}^* & p_{33}^* \end{bmatrix};\quad p=\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{31} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix}
$$

则式(2-5)又可写成

$$
P^*=QPQ^T \tag{2-6}
$$

式中 P——老坐标系 $Oy_1y_2y_3$ 下的应力张量，

P^*——新坐标系下同一点的应力张量，

p_{mn}^* 和 p_{ij} 分别表示两类坐标系下的应力张量元素。

分析式(2-5)可发现，矩阵的各行正好和 $\boldsymbol{p}_1$、$\boldsymbol{p}_2$、$\boldsymbol{p}_3$ 的分量相对应。回顾矢量 $\boldsymbol{A}$ 可用列矩阵

$$
\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix}
$$

表示，将这一结果和应力张量 P 对比，即可认为：

矢量——一阶张量的分量为一标量；应力张量——二阶张量的分量则是矢量。既然矢量 $\boldsymbol{A}$ 可表示成

$$
\boldsymbol{A}=A_1\boldsymbol{u}_1+A_2\boldsymbol{u}_2+A_3\boldsymbol{u}_3
$$

那么，二阶张量 P 也可表示成

$$
\left.\begin{aligned} P&=\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{p}_2\boldsymbol{u}_2+\boldsymbol{p}_3\boldsymbol{u}_3 \\ P&=\boldsymbol{u}_i p_{ij}\boldsymbol{u}_j \end{aligned}\right\} \tag{2-7}
$$

至此，所得应力张量的两种不同表示形式，一种以矩阵形式表示，而另一种则以“矢量”形式表示。

其次，根据式(2-4)和式(2-5)并对比定义绝对矢量的解析定义式(1-2)，它们在形式上没有区别，只是二阶张量有两个变换系数矩阵。既然式(1-2)可作为绝对矢量的解析定义式，式(2-4)当然也可作为定义二阶绝对张量的解析定义式。

以上针对应力张量的讨论具有普遍意义，现可据此定义二阶仿射正交张量如下：

二阶仿射正交张量 Π 是一个包含有九个分量 $(3^2)\Pi_{ij}$ 的数组，它们在坐标变换时，满足变换式

$$\Pi^*_{nm}=\alpha_{ni}\alpha_{mj}\Pi_{ij} \tag{2-8}$$

从式(2-8)可看出，如将这一变换式展开，则等式右边的每一项均包括 Π 的一个元素。由于变换是任意的，α_{ni}、α_{mj} 通常不全为零，因而，除非 Π 的所有元素 Π_{ij} 均为零，变换后的元素 Π^*_{nm} 才为零。这一结论十分重要，它常常用来判断九个数构成的数组是否为二阶仿射正交张量的依据。

如果要对 Π 作反变换，则只须在式(2-8)左右两边分别乘以 $\alpha_{nr}\alpha_{ms}$，然后再对 n、m 求和(指标缩减)，则

$$\alpha_{nr}\alpha_{ms}\Pi^*_{nm}=\alpha_{nr}\alpha_{ms}\alpha_{ni}\alpha_{mj}\Pi_{ij}$$

利用正交条件

$$\alpha_{nr}\alpha_{ni}=\delta_{ri},\quad \alpha_{ms}\alpha_{mj}=\delta_{sj}$$

代入上式，即得

$$\alpha_{nr}\alpha_{ms}\Pi^*_{nm}=\delta_{ri}\delta_{sj}\Pi_{ij}=\Pi_{rs}$$

或

$$\Pi_{rs}=\alpha_{nr}\alpha_{ms}\Pi^*_{nm} \tag{2-9}$$

附带说明一点，虽然没有讨论到更高阶的张量，但实际上已经遇到过三阶张量的例子 e_{ijk}。由 e_{ijk} 的定义式

$$e_{ijk}=u_i\cdot(u_j\times u_k)$$

在新坐标系下，e^*_{nml} 可写成

$$e^*_{nml}=\boldsymbol{u}^*_n\cdot(\boldsymbol{u}^*_m\times\boldsymbol{u}^*_l)$$

已知 $\boldsymbol{u}^*_n=\alpha_{ni}\boldsymbol{u}_i,\quad \boldsymbol{u}^*_m=\alpha_{mj}\boldsymbol{u}_j,\quad \boldsymbol{u}^*_l=\alpha_{lk}\boldsymbol{u}_k$

于是
$$e^*_{nml}=(\alpha_{ni}\alpha_{mj}\alpha_{lk})[\boldsymbol{u}_i\cdot(\boldsymbol{u}_j\times\boldsymbol{u}_k)]$$

或
$$e^*_{nml}=\alpha_{ni}\alpha_{mj}\alpha_{lk}e_{ijk}$$

上式表明 e_{ijk} 满足三阶张量的定义式，但值得注意的是，如果采用不确当变换，则 e_{ijk} 经变换后改变符号，所以 e_{ijk} 实际上是三阶伪张量。事实上，由上式及

$$e_{ijk}\alpha_{ni}\alpha_{mj}\alpha_{lk}=(\det Q)e_{nml}$$

于是有
$$e^*_{nml}=(\det Q)e_{nml}$$

由此可见，如果是不恰当变换，则由于 $\det Q=-1$，对应的顺序号元素均差一符号。

（二）工程中常见的二阶仿射正交张量

下面通过一些实例来说明二阶仿射正交张量的应用。

1．$[\delta_{ij}]$

根据 δ_{ij} 的定义，它应包含九个分量，如以矩阵表示，应是

$$[\delta_{ij}]=\begin{bmatrix}\delta_{11}&\delta_{12}&\delta_{13}\\\delta_{21}&\delta_{22}&\delta_{23}\\\delta_{31}&\delta_{32}&\delta_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

由式(1-23)，可得

$$\delta^*_{nm}=\alpha_{ni}\alpha_{mj}\delta_{ij}\tag{2-10}$$

式(2-10)表示 $[\delta_{ij}]$ 满足二阶仿射正交张量的定义式，因而它是二阶仿射正交张量。

由于这种张量的特殊性质，所以称它为单位张量，并以 I 表示，$I=[\delta_{ij}]$。显然，对于这种张量，如用矢量形式表示，则应为

$$I=\boldsymbol{\delta}_1\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{\delta}_2\boldsymbol{u}_2+\boldsymbol{\delta}_3\boldsymbol{u}_3$$

其中
$$\boldsymbol{\delta}_1=\delta_{11}\boldsymbol{u}_1+\delta_{12}\boldsymbol{u}_2+\delta_{13}\boldsymbol{u}_3=\boldsymbol{u}_1$$
$$\boldsymbol{\delta}_2=\delta_{21}\boldsymbol{u}_1+\delta_{22}\boldsymbol{u}_2+\delta_{23}\boldsymbol{u}_3=\boldsymbol{u}_2$$

$$\delta_3 = \delta_{31}\boldsymbol{u}_1 + \delta_{32}\boldsymbol{u}_2 + \delta_{33}\boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{u}_3$$

于是得

或
$$\left.\begin{aligned} I &= \boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2\boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3\boldsymbol{u}_3 \\ I &= \boldsymbol{u}_i\boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{u}_i\delta_{ij}\boldsymbol{u}_j \end{aligned}\right\} \tag{2-11}$$

2．位移张量 D

介质在外力作用下或在运动中将发生变形。介质的变形用相邻两点在变形前后相对位置的变化来表示，为此，在流场中任取一坐标系 $Oy_1y_2y_3$，同时约定，由于空间位置不同引起诸参数的微分用"δ"表示；由于时间推移引起诸参数的微分用"d"表示。

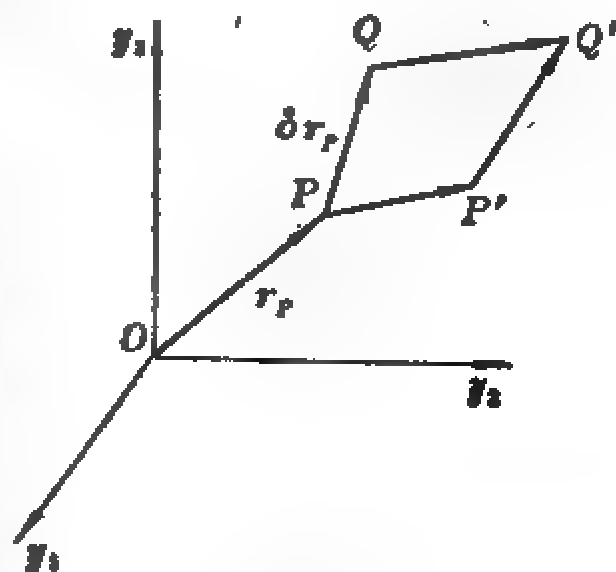


图 2-2

如图 2-2 所示，设在 t 时刻，于流场中任取两邻点 $P(\boldsymbol{r}_P)$ 和 $Q(\boldsymbol{r}_P+\delta\boldsymbol{r}_P)$，$\boldsymbol{r}_P$ 和 $\boldsymbol{r}_P+\delta\boldsymbol{r}_P$ 分别表示 P、Q 两点的位置矢量。假定在 t 时刻，位于 P、Q 两点的流体分别以速度 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}_P)$ 和 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}_P+\delta\boldsymbol{r}_P)$ 运动，经过 dt 之后，它们分别产生

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}_P)dt \quad 和 \quad \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}_P+\delta\boldsymbol{r}_P)dt$$

的位移到达 P'、Q' 两点，于是

$$\boldsymbol{OP'} = \boldsymbol{r}_P + \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}_P)dt$$

$$\boldsymbol{OQ'} = (\boldsymbol{r}_P + \delta\boldsymbol{r}_P) + \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}_P + \delta\boldsymbol{r}_P)dt$$

$$\delta\boldsymbol{r}'_P = \boldsymbol{OQ'} - \boldsymbol{OP'} = \delta\boldsymbol{r}_P + [\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}_P+\delta\boldsymbol{r}_P) - \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}_P)]dt$$

因而，$\boldsymbol{PQ}$ 在经过 dt 后产生的变化为

$$\delta\boldsymbol{r}'_P - \delta\boldsymbol{r}_P = [\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}_P+\delta\boldsymbol{r}_P) - \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}_P)]dt$$

假定 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}_P)$ 连续可导，当 $\delta\boldsymbol{r}_P \to 0$ 时，可得

$$d(\delta\boldsymbol{r}_P) = \delta\boldsymbol{v}dt$$

其在坐标轴方向的投影应是

$$d(\delta y_i)=\delta v_i dt \tag{a}$$

但由于 $v=v(y_1, y_2, y_3)$，所以

$$\delta v_i=(\delta v)_i=\frac{\partial v_i}{\partial y_j}\delta y_j \tag{b}$$

上式可用矩阵表示

$$\begin{bmatrix}\delta v_1\\ \delta v_2\\ \delta v_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial v_1}{\partial y_1} & \frac{\partial v_1}{\partial y_2} & \frac{\partial v_1}{\partial y_3}\\ \frac{\partial v_2}{\partial y_1} & \frac{\partial v_2}{\partial y_2} & \frac{\partial v_2}{\partial y_3}\\ \frac{\partial v_3}{\partial y_1} & \frac{\partial v_3}{\partial y_2} & \frac{\partial v_3}{\partial y_3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\delta y_1\\ \delta y_2\\ \delta y_3\end{bmatrix}$$

式中右边第一个矩阵中的任一个元素均可表示成

$$D_{ij}=\frac{\partial v_i}{\partial y_j}\text{[1]} \tag{2-12}$$

这九个量表示了流场中流体的相对位移，这种相对位移使流体产生变形运动。

假定将 y_i 坐标系下 D_{ij} 变换到 y_i^* 坐标系，证明 D_{ij} 满足变换关系式(2-8)，即 D 是二阶仿射正交张量。

由于速度 v 是绝对矢量，所以得

$$v_i^*=\alpha_{ij}v_j$$

$$\frac{\partial v_i^*}{\partial y_k^*}=\frac{\partial}{\partial y_p}(\alpha_{ij}v_j)\frac{\partial y_p}{\partial y_k^*}$$

又因 α_{ij} 为常数，故上式可改写成

$$\frac{\partial v_i^*}{\partial y_k^*}=\alpha_{ij}\frac{\partial y_p}{\partial y_k^*}\frac{\partial v_j}{\partial y_p}$$

已知

$$\alpha_{kp}=\frac{\partial y_p}{\partial y_k^*}$$

---

[1] D_{ij} 的物理意义在附录 I 中给出。

于是

$$\frac{\partial v_i^*}{\partial y_k^*}=\alpha_{ij}\alpha_{kP}\frac{\partial v_j}{\partial y_P} \tag{2-13}$$

则

$$\left.\begin{aligned}D_{ik}^*=\alpha_{ij}\alpha_{kP}D_{jP}\\ D_{nm}^*=\alpha_{ni}\alpha_{mj}D_{ij}\end{aligned}\right\} \tag{2-14}$$

或

即 D_{ij} 满足定义式，因而 D 是二阶仿射正交张量。

3．变形率张量 S

根据以上讨论，令 $|\delta \boldsymbol{r}_P|=\delta S$，则由

$$(\delta S)^2=(\delta y_1)^2+(\delta y_2)^2+(\delta y_3)^2=(\delta y_i)^2$$

左右两边求微分，得

$$\delta S d(\delta S)=\delta y_i d(\delta y_i)$$

由式(a)

$$d(\delta y_i)=\delta v_i dt=\frac{\partial v_i}{\partial y_j}\delta y_j dt$$

所以

$$\delta S d(\delta S)=\delta y_i\frac{\partial v_i}{\partial y_j}\delta y_j dt$$

将上式左右两边同除以$(\delta S)^2 dt$，即得

$$\frac{d(\delta S)}{\delta S\,dt}=\frac{\partial v_i}{\partial y_j}\frac{\delta y_i}{\delta S}\frac{\delta y_j}{\delta S}$$

上式左边表示 δS 的相对变形率，而右边的 $\delta y_i/\delta S$、$\delta y_j/\delta S$ 则分别表示 $\delta \boldsymbol{r}_P$ 与坐标轴夹角的方向余弦，现分别令其等于 n_i、n_j，则

$$\frac{d(\delta S)}{\delta S\,dt}=\frac{\partial v_i}{\partial y_j}n_i n_j \tag{2-15}$$

将上式右边对 i、j 展开，得

$$\frac{d(\delta S)}{\delta S\,dt}=\frac{\partial v_i}{\partial y_1}n_i n_1+\frac{\partial v_i}{\partial y_2}n_i n_2+\frac{\partial v_i}{\partial y_3}n_i n_3$$

$$
\begin{aligned}
&= n_1\left(\frac{\partial v_1}{\partial y_1}n_1+\frac{\partial v_1}{\partial y_2}n_2+\frac{\partial v_1}{\partial y_3}n_3\right)\\
&\quad+n_2\left(\frac{\partial v_2}{\partial y_1}n_1+\frac{\partial v_2}{\partial y_2}n_2+\frac{\partial v_2}{\partial y_3}n_3\right)\\
&\quad+n_3\left(\frac{\partial v_3}{\partial y_1}n_1+\frac{\partial v_3}{\partial y_2}n_2+\frac{\partial v_3}{\partial y_3}n_3\right)\\
&= n_1\left[\frac{\partial v_1}{\partial y_1}n_1+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial y_2}+\frac{\partial v_2}{\partial y_1}\right)n_2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_3}{\partial y_1}+\frac{\partial v_1}{\partial y_3}\right)n_3\right]\\
&\quad+n_2\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_2}{\partial y_1}+\frac{\partial v_1}{\partial y_2}\right)n_1+\frac{\partial v_2}{\partial y_2}n_2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_2}{\partial y_3}+\frac{\partial v_3}{\partial y_2}\right)n_3\right]\\
&\quad+n_3\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_3}{\partial y_1}+\frac{\partial v_1}{\partial y_3}\right)n_1+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_3}{\partial y_2}+\frac{\partial v_2}{\partial y_3}\right)n_2+\frac{\partial v_3}{\partial y_3}n_3\right]
\end{aligned}
$$

以上结果可表示成

$$
\frac{d(\delta S)}{\delta S\,dt}=[n_1\ n_2\ n_3]
\begin{bmatrix}
\frac{\partial v_1}{\partial y_1} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial y_2}+\frac{\partial v_2}{\partial y_1}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_3}{\partial y_1}+\frac{\partial v_1}{\partial y_3}\right)\\
\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_2}{\partial y_1}+\frac{\partial v_1}{\partial y_2}\right) & \frac{\partial v_2}{\partial y_2} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_2}{\partial y_3}+\frac{\partial v_3}{\partial y_2}\right)\\
\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_3}{\partial y_1}+\frac{\partial v_1}{\partial y_3}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_3}{\partial y_2}+\frac{\partial v_2}{\partial y_3}\right) & \frac{\partial v_3}{\partial y_3}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} n_1\\ n_2\\ n_3 \end{bmatrix}
$$

如令
$$S_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial y_j}+\frac{\partial v_j}{\partial y_i}\right),$$

则 S 可写成

$$
S=\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13}\\ S_{21} & S_{22} & S_{23}\\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix}
$$

并称 S 为变形率张量。

值得注意的是，对上述张量，其元素的下指标对换后相等，即

$$S_{ij}=S_{ji}$$

对满足这一关系的张量统称为对称张量。

4. 瞬时角速度张量

当刚体绕一瞬时轴以角速度 ω 旋转时，必将在刚体内感应出一速度场，如图 2-3 所示，取坐标系 $Oy_1y_2y_3$，瞬时轴的方向为 $\boldsymbol{n}$，刚体上一点 P 的位置矢量为 $\boldsymbol{r}_P$，则在 P 点感应出的速度 $\boldsymbol{v}$ 应是

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_P \qquad (2-16)$$

或

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{v}&=\varepsilon_{ijk}\omega_i y_j \boldsymbol{u}_k\\ v_1&=\varepsilon_{ijk}\omega_j y_k\end{aligned}\right\} \qquad (2-17)$$

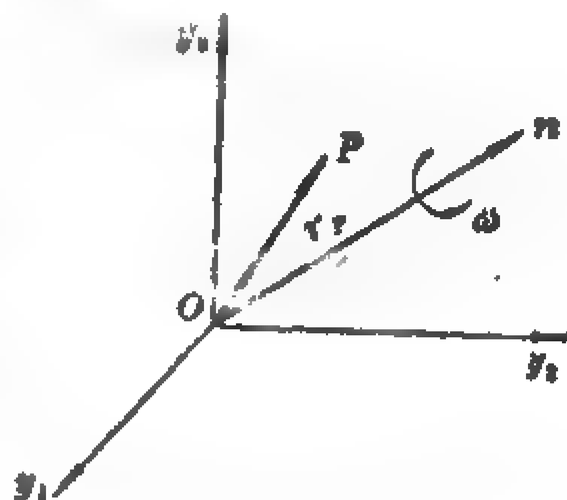


图 2-3

这一结果也可对 $\boldsymbol{r}_P$ 求时间的全导数得到。根据点 P 速度的定义，应为

$$\boldsymbol{v}=\frac{D\boldsymbol{r}_P}{Dt}=\frac{D}{Dt}(y_i\boldsymbol{u}_i)$$

由于 P 是刚体上指定的一点，其坐标位置相对于转轴不变，但固定在转轴上的坐标单位矢量 $\boldsymbol{u}_i$ 则是时间 t 的函数，即 $\boldsymbol{u}_i=\boldsymbol{u}_i(t)$，于是得

$$\boldsymbol{v}=y_i\frac{D\boldsymbol{u}_i}{Dt} \qquad (2-18)$$

根据式(2-18)可求得 Oy_1、Oy_2、Oy_3 方向的分量，即

$$\begin{aligned}
v_1&=y_1\left(\frac{D\boldsymbol{u}_1}{Dt}\cdot\boldsymbol{u}_1\right)+y_2\left(\frac{D\boldsymbol{u}_2}{Dt}\cdot\boldsymbol{u}_1\right)+y_3\left(\frac{D\boldsymbol{u}_3}{Dt}\cdot\boldsymbol{u}_1\right)\\
v_2&=y_1\left(\frac{D\boldsymbol{u}_1}{Dt}\cdot\boldsymbol{u}_2\right)+y_2\left(\frac{D\boldsymbol{u}_2}{Dt}\cdot\boldsymbol{u}_2\right)+y_3\left(\frac{D\boldsymbol{u}_3}{Dt}\cdot\boldsymbol{u}_2\right)\\
v_3&=y_1\left(\frac{D\boldsymbol{u}_1}{Dt}\cdot\boldsymbol{u}_3\right)+y_2\left(\frac{D\boldsymbol{u}_2}{Dt}\cdot\boldsymbol{u}_3\right)+y_3\left(\frac{D\boldsymbol{u}_3}{Dt}\cdot\boldsymbol{u}_3\right)
\end{aligned} \qquad (2-19)$$

$$\Omega_{ij}=\frac{D\boldsymbol{u}_i}{Dt}\cdot\boldsymbol{u}_j,\quad \Omega=\begin{bmatrix}\Omega_{11}&\Omega_{12}&\Omega_{13}\\ \Omega_{21}&\Omega_{22}&\Omega_{23}\\ \Omega_{31}&\Omega_{32}&\Omega_{33}\end{bmatrix} \qquad (2-20)$$

则上式可改写为

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}^T = [y_1 \ y_2 \ y_3] \begin{bmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} & \Omega_{13} \\ \Omega_{21} & \Omega_{22} & \Omega_{23} \\ \Omega_{31} & \Omega_{32} & \Omega_{33} \end{bmatrix}$$

现取另一坐标系，其单位矢量为 $\boldsymbol{u}_m^*$，则

$$\boldsymbol{u}_m^* = \alpha_{mj}\boldsymbol{u}_j, \quad \boldsymbol{u}_n^* = \alpha_{ni}\boldsymbol{u}_i$$

$$\frac{D\boldsymbol{u}_n^*}{Dt} = \alpha_{ni}\frac{D\boldsymbol{u}_i}{Dt}$$

于是得

$$\Omega_{nm}^* = \frac{D\boldsymbol{u}_n^*}{Dt}\cdot\boldsymbol{u}_m^* = \alpha_{ni}\alpha_{mj}\left(\frac{D\boldsymbol{u}_i}{Dt}\cdot\boldsymbol{u}_j\right)$$

或

$$\Omega_{nm}^* = \alpha_{ni}\alpha_{mj}\Omega_{ij} \tag{2-21}$$

上式表明 Ω_{ij} 满足定义二阶仿射正交张量的解析定义式，因而是二阶仿射正交张量。

下面具体计算 Ω 的元素 Ω_{ij}。首先根据

$$\boldsymbol{u}_1\cdot\boldsymbol{u}_1 = 1, \quad \boldsymbol{u}_1\cdot\boldsymbol{u}_2 = 0\cdots$$

可得

$$\frac{D\boldsymbol{u}_1}{Dt}\cdot\boldsymbol{u}_1 = \frac{D\boldsymbol{u}_2}{Dt}\cdot\boldsymbol{u}_2 = \frac{D\boldsymbol{u}_3}{Dt}\cdot\boldsymbol{u}_3 = 0 \tag{a}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{D\boldsymbol{u}_1}{Dt}\cdot\boldsymbol{u}_2 &= -\frac{D\boldsymbol{u}_2}{Dt}\cdot\boldsymbol{u}_1 \\ \frac{D\boldsymbol{u}_2}{Dt}\cdot\boldsymbol{u}_3 &= -\frac{D\boldsymbol{u}_3}{Dt}\cdot\boldsymbol{u}_2 \\ \frac{D\boldsymbol{u}_3}{Dt}\cdot\boldsymbol{u}_1 &= -\frac{D\boldsymbol{u}_1}{Dt}\cdot\boldsymbol{u}_3 \end{aligned}\right\} \tag{b}$$

除此以外，由于单位矢量 $\boldsymbol{u}_1$、$\boldsymbol{u}_2$、$\boldsymbol{u}_3$ 也是矢量，所以和

$$\frac{D\boldsymbol{r}_p}{Dt} = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_p$$

相类似，应得

$$\frac{D\boldsymbol{u}_1}{Dt}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{u}_1,\quad \frac{D\boldsymbol{u}_2}{Dt}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{u}_2,\quad \frac{D\boldsymbol{u}_3}{Dt}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{u}_3$$

则
$$\frac{D\boldsymbol{u}_1}{Dt}\cdot\boldsymbol{u}_2=(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{u}_1)\cdot\boldsymbol{u}_2=\boldsymbol{\omega}\cdot(\boldsymbol{u}_1\times\boldsymbol{u}_2)$$

已知
$$\boldsymbol{u}_1\times\boldsymbol{u}_2=\boldsymbol{u}_3$$

故

同理，可得
$$\left.\begin{aligned}\frac{D\boldsymbol{u}_1}{Dt}\cdot\boldsymbol{u}_2=\omega_3\\ \frac{D\boldsymbol{u}_2}{Dt}\cdot\boldsymbol{u}_3=\omega_1\\ \frac{D\boldsymbol{u}_3}{Dt}\cdot\boldsymbol{u}_1=\omega_2\end{aligned}\right\}\tag{2-22}$$

对照式(a)、(b)及式(2-22)，可将它们写成统一表达式

$$\Omega_{ij}=\left(\frac{D\boldsymbol{u}_i}{Dt}\cdot\boldsymbol{u}_j\right)=\varepsilon_{ijk}\omega_k\tag{2-23}$$

于是得

$$\Omega=\begin{bmatrix}0&\omega_3&-\omega_2\\-\omega_3&0&\omega_1\\\omega_2&-\omega_1&0\end{bmatrix};\quad \Omega_{ij}=-\Omega_{ji}\tag{2-24}$$

利用式(2-23)，如等式左右两边均乘以 ε_{ijm}，则得

$$\varepsilon_{ijm}\Omega_{ij}=\varepsilon_{ijm}\varepsilon_{ijk}\omega_k$$

但由式(1-26)，可得

$$\varepsilon_{ijm}\Omega_{ij}=2\delta_{mk}\omega_k=2\omega_m$$

或

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_{ijk}\Omega_{ij}=2\omega_k\\ \omega_k=\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\Omega_{ij}\end{aligned}\right\}\tag{2-25}$$

和应力张量相类似，令

$$\boldsymbol{\Omega}_i=\Omega_{ij}\boldsymbol{u}_j\tag{2-26}$$

则得

$$\left.\begin{aligned}\Omega_1&=0\boldsymbol{u}_1+\omega_3\boldsymbol{u}_2-\omega_2\boldsymbol{u}_3=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{u}_1\\ \Omega_2&=-\omega_3\boldsymbol{u}_1+0\boldsymbol{u}_2+\omega_1\boldsymbol{u}_3=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{u}_2\\ \Omega_3&=\omega_2\boldsymbol{u}_1-\omega_1\boldsymbol{u}_2+0\boldsymbol{u}_3=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{u}_3\end{aligned}\right\}\qquad(2\text{-}27)$$

而
$$\Omega=\boldsymbol{u}_i\Omega_i=\boldsymbol{u}_i(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{u}_i)$$

5．质点的转动惯量张量

由刚体动力学知道，质量为 m 的质点对原点 O 的角动量是

$$\boldsymbol{L}=m(\boldsymbol{r}_P\times\boldsymbol{v})$$

如果质点绕瞬时轴的转动角速度为 $\boldsymbol{\omega}$。则其线速度为

$$\boldsymbol{V}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_P$$

于是得
$$\boldsymbol{L}=m[\boldsymbol{r}_P\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_P)]=m[\boldsymbol{r}_P^2\boldsymbol{\omega}-\boldsymbol{r}_P(\boldsymbol{r}_P\cdot\boldsymbol{\omega})]$$

令 $|\boldsymbol{r}_P|=y_ky_k$，$\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{r}_P=\omega_jy_j$

则
$$\boldsymbol{L}=m[(y_ky_k)\boldsymbol{\omega}-(\omega_jy_j)\boldsymbol{r}_P]$$
$$L_i=m[(y_ky_k)\omega_i-(\omega_jy_j)y_i]$$

或

$$\begin{aligned}L_i&=m[(y_ky_k)\delta_{ij}\omega_j-(\omega_jy_j)y_i]\\&=m[(y_ky_k)\delta_{ij}-y_iy_j]\omega_j\end{aligned}$$

再令 $J_{ij}=m[(y_ky_k)\delta_{ij}-y_iy_j]$

则
$$L_i=J_{ij}\omega_j$$

或

$$\begin{bmatrix}L_1\\L_2\\L_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}J_{11}&J_{12}&J_{13}\\J_{21}&J_{22}&J_{23}\\J_{31}&J_{32}&J_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\omega_1\\\omega_2\\\omega_3\end{bmatrix}$$

现证明 J_{ij} 满足二阶仿射正交张量的解析定义式。

令新坐标系 $O^*y_1^*y_2^*y_3^*$ 下的 J_{nm}^* 为

$$J_{nm}^*=m[\delta_{nm}^*y_k^*y_k^*-y_n^*y_m^*]$$

由于
$$\delta_{nm}^*=\alpha_{ni}\alpha_{mj}\delta_{ij}$$
$$y_n^*=\alpha_{ni}y_i,\quad y_m^*=\alpha_{mj}y_j$$

$$y_k^* y_k^* = y_k y_k$$

所以 $$J_{nm}^* = m\alpha_{ni}\alpha_{mj}[\delta_{ij} y_k y_k - y_i y_j]$$

或 $$J_{nm}^* = \alpha_{ni}\alpha_{mj} J_{ij}$$

即 J_{ij} 满足定义二阶仿射正交张量的定义式，因而 J 是二阶仿射正交张量，称为转动惯量张量。

第二节　二阶仿射正交张量的分类及其代数运算

以上引进了二阶仿射正交张量的定义式，并密切结合工程力学讨论了若干张量的例子。为了加深对张量的认识，下面先介绍二阶仿射正交张量的分类，然后再说明其代数运算。

（一）二阶仿射正交张量的分类

1．单位张量 I

如果某二阶仿射正交张量 Π，其元素 Π_{ij} 满足

$$\Pi_{ij} = \begin{cases} 1 & (i=j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

则此张量称单位张量。显然，单位张量可表示成

$$\Pi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

或 $$\Pi = u_i \Pi_i, \quad \Pi_i = u_i$$

因而 $$\Pi = u_i u_i = u_i \delta_{ij} u_j$$

2．对称张量

如果张量 Π 中任一张量元素的值不因此元素的下指标相互置换而改变，即 $\Pi_{ij} = \Pi_{ji}$，则称此张量为对称张量。

3．反对称张量

如果张量Π中的任一张量元素由于该元素的下指标相互置换而改变符号，即$\Pi_{ij}=-\Pi_{ji}$，则此张量称反对称张量。

根据以上定义，对满足切应力互等的流体，其应力张量为对称张量，其余如变形率张量、转动惯量张量都是对称张量；至于瞬时角速度张量则是反对称张量。

无论是对称张量还是反对称张量，它们的共同特点是，经过变换后，其对称性或反对称性不变。现证明如下：

由

$$\Pi_{nm}^{*}=\alpha_{nj}\alpha_{mi}\Pi_{ji}$$

$$\Pi_{mn}^{*}=\alpha_{mj}\alpha_{ni}\Pi_{ij}$$

对于对称张量$\Pi_{ij}=\Pi_{ji}$

则

$$\Pi_{nm}^{*}=\alpha_{ni}\alpha_{mj}\Pi_{ij}=\alpha_{ni}\alpha_{mj}\Pi_{ji}=\Pi_{mn}^{*}$$

对于反对称张量$\Pi_{ij}=-\Pi_{ji}$

则

$$\Pi_{nm}^{*}=\alpha_{ni}\alpha_{mj}\Pi_{ij}=-\alpha_{ni}\alpha_{mj}\Pi_{ji}=-\Pi_{mn}^{*}$$

值得指出的是，二阶反对称张量实际上和伪矢量相当，现证明如下：

设Π为某二阶反称张量，则其元素必有

$$\Pi_{ij}=-\Pi_{ji}$$

或

$$\begin{bmatrix}\Pi_{11} & \Pi_{12} & \Pi_{13}\\ \Pi_{21} & \Pi_{22} & \Pi_{23}\\ \Pi_{31} & \Pi_{32} & \Pi_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & \xi_3 & -\xi_2\\ -\xi_3 & 0 & \xi_1\\ \xi_2 & -\xi_1 & 0\end{bmatrix}$$

式中

$$\Pi_{12}=-\Pi_{21}=\xi_3;\quad \Pi_{31}=-\Pi_{13}=\xi_2$$

$$\Pi_{32}=-\Pi_{23}=\xi_1$$

由张量的变换关系式并应用以上结果，我们有

$$\begin{aligned}\Pi_{nm}^{*}=\alpha_{ni}\alpha_{mj}\Pi_{ij}=&(\alpha_{n2}\alpha_{m3}-\alpha_{n3}\alpha_{m2})\xi_1\\ &+(\alpha_{n3}\alpha_{m1}-\alpha_{n1}\alpha_{m3})\xi_2+(\alpha_{n1}\alpha_{m2}-\alpha_{n2}\alpha_{m1})\xi_3\end{aligned}$$

我们已知，反对称张量经变换后仍为反对称张量，即 Π_{nm}^* 当 $n=m$ 时均为零。因此，对上式 $n=m$ 的各新元素不必展开，而可令 $n\neq m$ 时

$$\Pi_{nm}^*=\xi_l^*$$

此处 $n\neq m\neq l$，于是，由上式可得

$$\xi_1^*=(\alpha_{22}\alpha_{33}-\alpha_{23}\alpha_{32})\xi_1+(\alpha_{23}\alpha_{31}-\alpha_{21}\alpha_{33})\xi_2+(\alpha_{21}\alpha_{32}-\alpha_{22}\alpha_{31})\xi_3$$
$$\xi_2^*=(\alpha_{32}\alpha_{13}-\alpha_{33}\alpha_{12})\xi_1+(\alpha_{33}\alpha_{11}-\alpha_{13}\alpha_{31})\xi_2+(\alpha_{31}\alpha_{12}-\alpha_{32}\alpha_{11})\xi_3$$
$$\xi_3^*=(\alpha_{12}\alpha_{23}-\alpha_{13}\alpha_{22})\xi_1+(\alpha_{13}\alpha_{21}-\alpha_{11}\alpha_{23})\xi_2+(\alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{12}\alpha_{21})\xi_3$$

但由式(1–46)′，立即可得

$$\xi_1^*=M_{11}\xi_1+M_{12}\xi_2+M_{13}\xi_3$$
$$\xi_2^*=M_{21}\xi_1+M_{22}\xi_2+M_{23}\xi_3$$
$$\xi_3^*=M_{31}\xi_1+M_{32}\xi_2+M_{33}\xi_3$$

以及

$$\xi_1^*=(\det Q)(\alpha_{11}\xi_1+\alpha_{12}\xi_2+\alpha_{13}\xi_3)$$
$$\xi_2^*=(\det Q)(\alpha_{21}\xi_1+\alpha_{22}\xi_2+\alpha_{23}\xi_3)$$
$$\xi_3^*=(\det Q)(\alpha_{31}\xi_1+\alpha_{32}\xi_2+\alpha_{33}\xi_3)$$

或简写成
$$\xi_i^*=(\det Q)\alpha_{ik}\xi_k$$

上式实际上就是伪矢量的变换关系式。由此可见，二阶反对称张量即为伪矢量。

4. 张量的转置和转置张量

将表示张量Π的矩阵中之行和列相互转置，组成一新张量Π^T，即称张量的转置，而转置后的张量则称转置张量。

Π 和 Π^T 元素之间的关系应是

$$\Pi_{ij}=\Pi_{ji}^T$$

对于对称张量，应为

$$\Pi=\Pi^T$$

而对于反对称张量，则是

$$\Pi^T = -\Pi$$

（二）张量的代数运算

张量代数的基本运算是加减法和乘法。除这些运算以外，把指标缩减看成是张量的特殊运算，但无论哪种运算，其运算结果仍应是张量。

为了方便，所讨论的只限于二阶以下的张量。

1．张量的加、减运算

设 A_{ij}、B_{ij} 为两个二阶仿射正交张量 A、B 的元素，则它们的和构成另一个新的二阶仿射正交张量 C，其元素为

$$C_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$$

由于 A、B 是二阶仿射正交张量，所以经变换后：

$$A^*_{nm} = \alpha_{ni}\alpha_{mj}A_{ij}, \quad B^*_{nm} = \alpha_{ni}\alpha_{mj}B_{ij}$$

而新元素之和应是

$$A^*_{nm} + B^*_{nm} = C^*_{nm} = \alpha_{ni}\alpha_{mj}(A_{ij} + B_{ij})$$

由此可见 $$C^*_{nm} = \alpha_{ni}\alpha_{mj}C_{ij}$$

即 C 为二阶仿射正交张量。

张量的减法和加法雷同，此处不再赘述。

2．张量的分解

任一张量 Π 均可分解为对称部分（对称张量）和反对称部分（反对称张量）之和，事实上，由

$$\Pi_{ij} = \frac{1}{2}(\Pi_{ij} + \Pi_{ji}) + \frac{1}{2}(\Pi_{ij} - \Pi_{ji})$$

根据对称张量和反对称张量的定义，元素 $\frac{1}{2}(\Pi_{ij} + \Pi_{ji})$ 构成一对称张量 Σ，元素 $\frac{1}{2}(\Pi_{ij} - \Pi_{ji})$ 则构成一反对称张量 A。下面证明 Σ、A 均可通过张量 Π 和转置张量 Π^T 求得。

由以上讨论可知，

$$\Pi=\sum+A \tag{a}$$

但由于 $\sum=\sum^T,\quad A=-A^T$

所以

$$\Pi^T=\sum^T+A^T=\sum-A \tag{b}$$

联立式(a)、(b)，即可求得对称部分和反对称部分如下：

$$\sum=\frac{1}{2}(\Pi+\Pi^T),\quad A=\frac{1}{2}(\Pi-\Pi^T) \tag{2-28}$$

以位移张量 D 为例。位移张量 D 的元素为 D_{ij}，转置位移张量 D^T 的元素为 D_{ji}，因而，位移张量 D 的对称部分和反对称部分，其元素分别为

$$\sum_{ij}=S_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial y_j}+\frac{\partial v_j}{\partial y_i}\right)$$

$$A_{ij}=W_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial y_j}-\frac{\partial v_j}{\partial y_i}\right)$$

$$D_{ij}=S_{ij}+W_{ij},\quad D=S+W$$

以后将会看到，D 的反对称部分 $W_{ij}=\quad \Omega_{ij}=\Omega_{ji}$。

3．张量的乘法

张量的乘法可分外积、缩减、内积三种，下面一一加以介绍。

(1) 外积

两个任意阶次的张量之外积构成一新张量，此张量的元素为两张量诸元素的互乘。下面举例说明。

两矢量（一阶张量）$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 的外积可写成

$$\boldsymbol{AB}=A_iB_j\boldsymbol{u}_i\boldsymbol{u}_j$$

上式对 i、j 求和展开，则可得九项，如令 $T_{ij}=A_iB_j$，则 T 构成一新张量

$$\boldsymbol{AB}=[\boldsymbol{u}_1\ \boldsymbol{u}_2\ \boldsymbol{u}_3]\begin{bmatrix}T_{11} & T_{12} & T_{13}\\ T_{21} & T_{22} & T_{23}\\ T_{31} & T_{32} & T_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{u}_1\\ \boldsymbol{u}_2\\ \boldsymbol{u}_3\end{bmatrix}$$

矢量 $\boldsymbol{v}$ 和二阶张量 $\boldsymbol{F}$ 的外积则可表示成

$$\boldsymbol{v}\boldsymbol{F}=v_iF_{jk}\boldsymbol{u}_i\boldsymbol{u}_j\boldsymbol{u}_k$$

令

$$G_{ijk}=v_iF_{jk}$$

则 G_{ijk} 必将构成一个三阶张量，依此类推可得出结论如下：两个张量的外积所得之新张量的阶次是此两张量阶次之和。

应用外积的概念，可将位移张量 $\boldsymbol{D}$ 改写成

$$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{u}_i\frac{\partial v_i}{\partial y_j}\boldsymbol{u}_j=\boldsymbol{u}_j\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial y_j}=\nabla\boldsymbol{v}$$

即 $\boldsymbol{D}$ 乃是 ∇ 和 $\boldsymbol{v}$ 的外积。

(2) 缩减

一个张量（或若干张量）的缩减运算，是将原来的一个（或数个）指定指标改为求和指标，然后求和而得新张量，这种运算称缩减运算。

例如，T_{ij} 缩减后得 T_{ii}，对 i 求和，得

$$T_{ii}=T_{11}+T_{22}+T_{33}$$

从张量 T 的矩阵可知，T_{ii} 正好是矩阵对角线诸元素之和，通常可用 $\mathrm{tr}\boldsymbol{T}$（tr 是迹的缩写）表示，于是

$$\mathrm{tr}\boldsymbol{T}=T_{ii}$$

不难从两个矢量 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 的外积看出

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{AB})=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=A_1B_1+A_2B_2+A_3B_3$$

这一结果说明，两个矢量的数性积可看成两矢量外积的缩减。

作为工程上的实际例，我们还可看到，D 和 S 的迹可表示成

$$\mathrm{tr}D=D_{ii}=\mathrm{div}\,\boldsymbol{v};\quad \mathrm{tr}S=S_{ii}=\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}$$

于是

$$\mathrm{tr}D=\mathrm{tr}S$$

张量的缩减运算将使张量降阶，从以上例子可见，每缩减一次，张量降两阶。

为了更好地理解张量的缩减运算，下面再看几种情况：

$E_{ij}a_k$ 的缩减

由于 $E_{ij}a_k$ 有三个下指标，因而其可能的缩减有

$$E_{ij}a_i,\quad E_{ij}a_j,\quad E_{ii}a_k$$

对于以上三种可能的缩减，可用二阶张量与矢量的数性积来说明

令
$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{u}_i\boldsymbol{u}_jE_{ij},\quad \boldsymbol{a}=a_k\boldsymbol{u}_k$$

今规定 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{a}$ 作数性积时，应以最靠近的两个单位矢量作数性积，因而

$$\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{a}=E_{ij}\boldsymbol{u}_i\boldsymbol{u}_j\cdot a_k\boldsymbol{u}_k=E_{ij}a_k\boldsymbol{u}_i(\boldsymbol{u}_j\cdot\boldsymbol{u}_k)=E_{ij}a_k\boldsymbol{u}_i\delta_{jk}$$

或
$$\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{a}=E_{ij}a_j\boldsymbol{u}_i$$

令 $b_i=E_{ij}a_j$，则 b_i 可视为二阶张量和矢量（一阶张量）作数性积（矢量 $\boldsymbol{a}$ 从右面与$\boldsymbol{E}$作数性积）时的矢量分量。如用矩阵表示，则

$$\begin{bmatrix} b_1\\ b_2\\ b_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13}\\ E_{21} & E_{22} & E_{23}\\ E_{31} & E_{32} & E_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1\\ a_2\\ a_3\end{bmatrix}\tag{2-29}$$

与上面讨论相类似

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{E}=a_iE_{ij}\boldsymbol{u}_j=\boldsymbol{C}$$

或

$$\left.\begin{aligned} &C_j=E_{ij}a_i\\ &[C_1\ \ C_2\ \ C_3]=[a_1\ \ a_2\ \ a_3]\begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13}\\ E_{21} & E_{22} & E_{23}\\ E_{31} & E_{32} & E_{33}\end{bmatrix}\end{aligned}\right\}\tag{2-30}$$

至于 $E_{ii}a_k$，可看成$(\mathrm{tr}\boldsymbol{E})\boldsymbol{a}$ 的分量，因为

$$\begin{aligned}(\mathrm{tr}\boldsymbol{E})\boldsymbol{a}&=\mathrm{tr}(\boldsymbol{u}_i\boldsymbol{u}_jE_{ij})\boldsymbol{a}=E_{ij}\mathrm{tr}(\boldsymbol{u}_i\boldsymbol{u}_j)\boldsymbol{a}=E_{ij}(\boldsymbol{u}_i\cdot\boldsymbol{u}_j)\boldsymbol{a}\\ &=E_{ij}\delta_{ij}\boldsymbol{a}=E_{ii}a_k\boldsymbol{u}_k=d_k\boldsymbol{u}_k\end{aligned}$$

于是

$$d_k = E_{ij}a_k \tag{2-31}$$

对于两个二阶张量外积$E_{ij}E_{km}$的缩减运算，有下列六种可能，即

$$E_{ij}F_{im} = G_{jm} \qquad E_{ij}F_{ki} = P_{jk}$$

$$E_{ij}F_{kk} = H_{ij} \qquad E_{ij}F_{jm} = Q_{im}$$

$$E_{ii}F_{km} = K_{km} \qquad E_{ij}F_{kj} = R_{ik}$$

(3) 内积

所谓内积，实际上是将外积作一次或多次缩减运算的结果，下面列表以示两者关系：

外积	内积：指标表示法	内积：符号表示法
1．a_ib_j	a_ib_i	$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$
2．a_iE_{jk}	$a_iE_{ik} = f_k$	$\boldsymbol{a}\cdot E = \boldsymbol{f}$
	$a_iE_{ji} = k_j$	$E\cdot\boldsymbol{a} = \boldsymbol{k}$
3．$E_{ij}F_{km}$	$E_{ij}F_{jm} = G_{im}$	$E\cdot E = G$
4．$E_{ij}E_{km}$	$E_{ij}E_{jm} = B_{im}$	$E\cdot E = (E)^2$

如作二次缩减，则

外积	内积：指标表示法	内积：符号表示法
5．$E_{ij}F_{km}$	$E_{ij}F_{ij}$	$E:F$
6．$E_{ij}E_{km}E_{pq}$	$E_{ij}E_{jm}E_{mq}$	$(E)^3$

注意：这里$(E)^2$和$(E)^3$表示两个和三个矩阵相乘，$E:F$表示E和F作两次数性积。

利用以上结果，可对两个矢量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$的矢性积$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$作如下解释：

由
$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \varepsilon_{ijk}a_jb_k\boldsymbol{u}_i$$
于是
$$C_i = \varepsilon_{ijk}a_jb_k$$

上式中的顺序记号ε_{ijk}是三阶张量的元素，j、k为求和指标，而$\varepsilon_{ijk}a_jb_k$可视为一个三阶张量和两个一阶张量的内积，即两个矢量的矢性积也可用张量的内积来理解。

第三节　张量代数运算在力学中应用的实例

以上讨论的张量代数运算在力学中有很大的实用价值，利用这些运算可以简化书写，其形式极为简捷。下面举数例说明之。

（一）流体中一点的应力 $\boldsymbol{p}_n$

如果在流体中任取一点，过这一点取法线为 $\boldsymbol{n}$ 的微元面积，则作用在这一点的应力 $\boldsymbol{p}_n$，其表达式已在前面讨论过，为

$$\boldsymbol{p}_n=\alpha_{ni}\boldsymbol{p}_i$$

上式可用 $\boldsymbol{n}$ 从左面和应力张量 P 的数性积表示，即

$$\boldsymbol{p}_n=\boldsymbol{n}\cdot P$$

事实上，由于

$$P=\boldsymbol{u}_i\boldsymbol{u}_j p_{ij}=\boldsymbol{u}_i\boldsymbol{p}_i$$

所以

$$\boldsymbol{n}\cdot P=(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{u}_i)\boldsymbol{p}_i=\alpha_{ni}\boldsymbol{p}_i$$

$$\boldsymbol{p}_n=\boldsymbol{n}\cdot P=\alpha_{ni}\boldsymbol{p}_i \tag{2-32}$$

作为特殊情况，对于理想流体，由于

$$p_{ij}=\begin{cases}-p(i=j)\\ 0(i\neq j)\end{cases}$$

则

$$\boldsymbol{p}_i=-p\boldsymbol{u}_i$$

又由 $P=\boldsymbol{u}_i\boldsymbol{p}_i$，于是

$$P=\boldsymbol{u}_i\boldsymbol{u}_i(-p)$$

但已知 $\boldsymbol{u}_i\boldsymbol{u}_i=I$，因而

$$P=-pI$$

代入式(2-32)，得

$$\boldsymbol{p}_n=\boldsymbol{n}\cdot P=\alpha_{ni}\boldsymbol{p}_i=-(\alpha_{ni}\boldsymbol{u}_i)p$$

因已知 $\boldsymbol{n}=\alpha_{ni}\boldsymbol{u}_i$，所以理想流体一点的应力 $\boldsymbol{p}_n$ 可表示成

$$\boldsymbol{p}_n = -p\boldsymbol{n} \tag{2-33}$$

由于 $\boldsymbol{n}$ 是任意取的，则式(2-33)表明，理想流体一点的应力大小与作用面方向无关。

(二) 任一矢量 $\boldsymbol{a}$ 与单位张量 $\boldsymbol{I}$ 的内积

根据矢量和二阶张量的内积定义，矢量 $\boldsymbol{a}$ 可从左面也可从右面与 $\boldsymbol{I}$ 作数性积。令

$$\boldsymbol{I} = \boldsymbol{u}_i\boldsymbol{u}_i, \quad \boldsymbol{a} = a_k\boldsymbol{u}_k$$

则 $$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{I} = a_k\boldsymbol{u}_k\cdot(\boldsymbol{u}_i\boldsymbol{u}_i) = a_k(\boldsymbol{u}_k\cdot\boldsymbol{u}_i)\boldsymbol{u}_i = a_k\delta_{ki}\boldsymbol{u}_i = a_i\boldsymbol{u}_i$$

因而

同理可证
$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{I} = \boldsymbol{a}\\ \boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}\end{aligned}\right\} \tag{2-34}$$

上式表明，矢量 $\boldsymbol{a}$ 无论从左面或右边和 $\boldsymbol{I}$ 作数性积，其结果仍是矢量 $\boldsymbol{a}$ 本身，这也正是称 $\boldsymbol{I}$ 为单位张量的理由。

如果有两个矢量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 同时从左面和右面与 $\boldsymbol{I}$ 作数性积，则有

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = a_i\delta_{ij}b_j = a_ib_i$$

作为特例，当 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{u}_i$、$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{u}_j$ 时，则

$$\boldsymbol{u}_i\cdot\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{u}_j = \delta_{ij} \tag{2-35}$$

(三) 张量元素的定义式

如果将式(2-35)推广到一般的二阶张量，则

$$\boldsymbol{u}_i\cdot\boldsymbol{\Pi}\cdot\boldsymbol{u}_j = \boldsymbol{u}_i\cdot(\boldsymbol{u}_n\boldsymbol{u}_m\Pi_{nm})\cdot\boldsymbol{u}_j = \Pi_{ij}$$

于是

$$\Pi_{ij} = \boldsymbol{u}_i\cdot\boldsymbol{\Pi}\cdot\boldsymbol{u}_j \tag{2-36}$$

式(2-36)可看成张量 $\boldsymbol{\Pi}$ 之元素 Π_{ij} 的定义式。

还可看出，δ_{ij} 是单位张量 $\boldsymbol{I}$ 的元素。

(四) 应力 $\boldsymbol{p}_n$ 的作功率

一点的应力表达式已在上面求得，现设该点的流体具有运动速度 $\boldsymbol{v}$，则 $\boldsymbol{p}_n$ 对流体的作功率可写成

$$DL = p_n \cdot v = n \cdot P \cdot v \tag{2-37}$$

（五）应力张量 P 和位移张量 D 的二次内积

应力张量 P 代表了作用于一点的九个应力，在这九个应力作用下产生位移(变形)，它以位移张量 D 为表征。应力对变形所做的功率应是应力乘以相应的变形率，即 $p_{ij}D_{ij}$。根据两张量二次内积的定义

$$p_{ij}D_{ij} = P : D$$

已知
$$D_{ij} = S_{ij} + W_{ij}$$

于是

$$\left.\begin{aligned} p_{ij}D_{ij} &= p_{ij}(S_{ij} + W_{ij}) \\ p_{ij}D_{ij} &= p_{ij}S_{ij} + p_{ij}W_{ij} \end{aligned}\right\} \tag{2-38}$$

或

式中 $P_{ij} = p_{ij}$ 及 $S_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial y_j} + \frac{\partial v_j}{\partial y_i}\right)$ 均为对称张量 P、S 的元素；$W_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial y_j} - \frac{\partial v_j}{\partial y_i}\right)$ 则是反对称张量 W 的元素。

将上式中第二式求和展开，则有

$$\begin{aligned} p_{ij}W_{ij} &= p_{i1}W_{i1} + p_{i2}W_{i2} + p_{i3}W_{i3} \\ &= p_{11}W_{11} + p_{12}W_{12} + p_{13}W_{13} + p_{21}W_{21} + p_{22}W_{22} \\ &\quad + p_{23}W_{23} + p_{31}W_{31} + p_{32}W_{32} + p_{33}W_{33} \end{aligned}$$

已知 $W_{11} = W_{22} = W_{33} = 0$，$W_{12} = -W_{21}$，$W_{23} = -W_{32}$，
$W_{13} = -W_{31}$，$p_{12} = p_{21}$，$p_{23} = p_{32}$，$p_{31} = p_{13}$，于是

$$p_{ij}W_{ij} = 0 \quad 或 \quad P : W = 0 \tag{2-39}$$

以上结果具有普遍性，可归纳如下：一个二阶对称张量和一个同阶的反对称张量之二次内积为零。

不难理解，一个张量的对称部分 Σ 和反对称部分 A 的二次内积为零，即

$$\Sigma : A = 0 \tag{2-40}$$

（六）位移矢量 r_p 和瞬时角速度张量 Ω 的内积由

$$\boldsymbol{r}_P = y_j\boldsymbol{u}_j,\ \boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{u}_i\boldsymbol{\Omega}_i$$

$$\boldsymbol{\Omega}_i = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{u}_i$$

可得 $\boldsymbol{r}_P \cdot \boldsymbol{\Omega} = y_j\boldsymbol{u}_j \cdot \boldsymbol{u}_i\boldsymbol{\Omega}_i = y_j\delta_{ij}\boldsymbol{\Omega}_i = y_i(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{u}_i) = \boldsymbol{\omega} \times (y_i\boldsymbol{u}_i)$

于是

或

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{r}_P \cdot \boldsymbol{\Omega} &= \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_P \\ \boldsymbol{v} &= \boldsymbol{r}_P \cdot \boldsymbol{\Omega} \end{aligned}\right\} \tag{2-41}$$

上式表明，由转动角速度感应出的速度场，可由位置矢量 $\boldsymbol{r}_P$ 和 $\boldsymbol{\Omega}$ 的内积表示。

对于一般的反对称张量，仍可得出以上结论如下：

设某反对称张量 $\boldsymbol{\Pi}$ 为

$$\boldsymbol{\Pi} = \boldsymbol{u}_i\boldsymbol{\Pi}_i$$

其中

$$\boldsymbol{\Pi}_1 = \Pi_{12}\boldsymbol{u}_2 + \Pi_{13}\boldsymbol{u}_3$$

$$\boldsymbol{\Pi}_2 = \Pi_{21}\boldsymbol{u}_1 + \Pi_{23}\boldsymbol{u}_3$$

$$\boldsymbol{\Pi}_3 = \Pi_{31}\boldsymbol{u}_1 + \Pi_{32}\boldsymbol{u}_2$$

令式中 $\Pi_{12} = -\Pi_{21} = \xi_3,\ \Pi_{23} = -\Pi_{32} = \xi_1,\ \Pi_{31} = -\Pi_{13} = \xi_2$ 则

$$\boldsymbol{\Pi}_1 = \boldsymbol{\xi} \times \boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{\Pi}_2 = \boldsymbol{\xi} \times \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{\Pi}_3 = \boldsymbol{\xi} \times \boldsymbol{u}_3$$

式中

$$\boldsymbol{\xi} = \xi_1\boldsymbol{u}_1 + \xi_2\boldsymbol{u}_2 = \xi_3\boldsymbol{u}_3$$

于是

$$\boldsymbol{\Pi} = \boldsymbol{u}_i(\boldsymbol{\xi} \times \boldsymbol{u}_i)$$

$$\boldsymbol{r}_P \cdot \boldsymbol{\Pi} = y_j\boldsymbol{u}_j \cdot [\boldsymbol{u}_i(\boldsymbol{\xi} \times \boldsymbol{u}_i)] = \boldsymbol{\xi} \times \boldsymbol{r}_P$$

（七）变形速度的分解

流体力学中，变形速度的分解是一个重要的概念，它可用张量分析这一工具介绍如下：

设流场中，任一点的速度为 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}_P)$ 而邻近一点的速度为 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}_P + \delta\boldsymbol{r}_P)$，则，当 $\delta\boldsymbol{r}_P \to 0$ 时，有

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}_P + \delta\boldsymbol{r}_P) = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}_P) + \delta\boldsymbol{r}_P \cdot (\nabla\boldsymbol{v}) + \cdots$$

$$= \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}_P) + \delta\boldsymbol{r}_P \cdot \left\{\frac{1}{2}\left[\nabla\boldsymbol{v} + (\nabla\boldsymbol{v})^T\right] + \frac{1}{2}[\nabla\boldsymbol{v} - (\nabla\boldsymbol{v})^T] + \cdots\right.$$

已知 $\nabla \boldsymbol{v}=D$，其元素 $D_{ij}=\dfrac{\partial v_i}{\partial y_j}$，于是 $\nabla \boldsymbol{v}-(\nabla \boldsymbol{v})^T$ 的元素 Ω_{ij} 为

$$\Omega_{ij}=\frac{\partial v_i}{\partial y_j}-\frac{\partial v_j}{\partial y_i}$$

令
$$\Omega=[(\nabla \boldsymbol{v})-(\nabla \boldsymbol{v})^T]=\boldsymbol{u}_i\Omega_i$$

$$\xi_1=\Omega_{23}=\frac{\partial v_2}{\partial y_3}-\frac{\partial v_3}{\partial y_2};\ \xi_2=\Omega_{31}=\frac{\partial v_3}{\partial y_1}-\frac{\partial v_1}{\partial y_3}$$

$$\xi_3=\Omega_{12}=\frac{\partial v_1}{\partial y_2}-\frac{\partial v_2}{\partial y_1}$$

同时
$$\Omega_{12}=-\Omega_{21},\ \Omega_{23}=-\Omega_{32},\ \Omega_{31}=-\Omega_{13}$$

$$\Omega_{11}=\Omega_{22}=\Omega_{33}=0$$

于是
$$\boldsymbol{\xi}=\xi_i\boldsymbol{u}_i=\text{rot}\,\boldsymbol{v}$$

$$\boldsymbol{\Omega}_i=\boldsymbol{\xi}\times\boldsymbol{u}_i=\text{rot}\,\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{u}_i$$

$$\boldsymbol{\Omega}=\boldsymbol{u}_i(\text{rot}\,\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{u}_i)$$

$$\delta\boldsymbol{r}_P\cdot\Omega=\delta\boldsymbol{r}_P\cdot[(\nabla \boldsymbol{v})-(\nabla \boldsymbol{v})^T]=\delta\boldsymbol{r}_P\cdot[\boldsymbol{u}_i(\text{rot}\,\boldsymbol{v})\times\boldsymbol{u}_i]$$

令 $\delta\boldsymbol{r}_P=\delta y_j\boldsymbol{u}_j$，则得

$$\begin{aligned}\delta\boldsymbol{r}_P\cdot[(\nabla \boldsymbol{v})-(\nabla \boldsymbol{v})^T]&=\delta y_j\boldsymbol{u}_j\cdot[\boldsymbol{u}_i(\text{rot}\,\boldsymbol{v})\times\boldsymbol{u}_i]\\&=\text{rot}\,\boldsymbol{v}\times\delta\boldsymbol{r}_P\end{aligned}$$

因而

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}_P+\delta\boldsymbol{r}_P)=\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}_P)+\delta\boldsymbol{r}_P\cdot\Big\{&\frac{1}{2}[(\nabla \boldsymbol{v})+(\nabla \boldsymbol{v})^T]\\&+\frac{1}{2}[(\nabla \boldsymbol{v})-(\nabla \boldsymbol{v})^T]\Big\}+\cdots\end{aligned}$$

已知
$$\frac{1}{2}[(\nabla \boldsymbol{v})+(\nabla \boldsymbol{v})^T]=S$$

于是，最后可得

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}_P+\delta\boldsymbol{r}_P)=\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}_P)+\delta\boldsymbol{r}_P\cdot S+\frac{1}{2}\text{rot}\,\boldsymbol{v}\times\delta\boldsymbol{r}_P$$

第四节　仿射正交张量场的微分

在力学、特别是流体力学中，广泛应用标量场和矢量场的概念。所谓标量场，就是标量的空间分布；而矢量场则是矢量的空间分布。一般情况下，标量和矢量都是空间点位置矢量和时间 t 的函数，即

$$\phi=\phi(\boldsymbol{r}_P,\ t);\quad \boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}_P,\ t)$$

将场的概念推广到任意阶的张量 Π，则 Π 也应当是 $\boldsymbol{r}_P$ 的函数，即

$$\Pi=\Pi(\boldsymbol{r}_P,\ t)$$

要描写张量场的分布强度，在第一章中已经提及，必须求该张量每一元素（是一个标量）的梯度，即必须讨论张量的微分问题。

下面就二阶仿射正交张量的分布强度问题作些讨论，但必须着重指出，所有结论只对二阶仿射正交张量有效。

（一）标量场的微分

设 $\phi(\boldsymbol{r}_P)$ 为某定义域内的标量函数，则

$$\frac{\partial\phi}{\partial y_i}$$

表示 ϕ 沿 y_i 方向的变化率。显然，由 $\dfrac{\partial\phi}{\partial y_i}$ 构成一个矢量——标量 ϕ 的梯度 $\nabla\phi$。已在第一章的例题中证明，只要 $\phi(\boldsymbol{r}_P)$ 是绝对标量，则 $\nabla\phi$ 就是绝对矢量。

如令 $d\boldsymbol{r}_P$ 为位置矢量 $\boldsymbol{r}_P$ 的微分，则 $d\boldsymbol{r}_P=dy_i\boldsymbol{u}_i$

$$d\phi=\frac{\partial\phi}{\partial y_1}dy_1+\frac{\partial\phi}{\partial y_2}dy_2+\frac{\partial\phi}{\partial y_3}dy_3=(d\boldsymbol{r}_P\cdot\nabla)\phi$$

（二）矢量场的微分

令 A_i 为矢量 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}_P)$ 的三个分量，则 $\dfrac{\partial A_i}{\partial y_j}$ 表示标量 A_i 沿 y_j 方向的变化率。只要矢量 $\boldsymbol{A}$ 是绝对矢量，则由 $\partial A_i/\partial y_j$ 构成的九

个数组为二阶张量，事实上，令

$$T_{ij}=\frac{\partial A_i}{\partial y_j}$$

经变换后为

$$T^*_{nm}=\frac{\partial A^*_n}{\partial y^*_m}$$

根据假定，$\boldsymbol{A}$ 为绝对矢量，因而有

$$A^*_n=\alpha_{ni}A_i$$

于是

$$\frac{\partial A^*_n}{\partial y^*_m}=\alpha_{ni}\frac{\partial A_i}{\partial y_j}\frac{\partial y_j}{\partial y^*_m}$$

由式(1-42)，得

$$\alpha_{mj}=\frac{\partial y_j}{\partial y^*_m}$$

令

$$T^*_{nm}=\frac{\partial A^*_n}{\partial y^*_m};\quad T_{ij}=\frac{\partial A_i}{\partial y_j}$$

于是有

$$T^*_{nm}=\alpha_{ni}\alpha_{mj}T_{ij}$$

上式表明 T_{ij} 满足定义二阶仿射正交张量的解析定义式，因而

$$\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial A_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial A_1}{\partial y_2} & \dfrac{\partial A_1}{\partial y_3}\\ \dfrac{\partial A_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial A_2}{\partial y_2} & \dfrac{\partial A_2}{\partial y_3}\\ \dfrac{\partial A_3}{\partial y_1} & \dfrac{\partial A_3}{\partial y_2} & \dfrac{\partial A_3}{\partial y_3}\end{bmatrix} \tag{2-42}$$

是二阶仿射正交张量。

和标量相仿，定义

$$\nabla\boldsymbol{A}$$

为矢量 $\boldsymbol{A}$ 的梯度，由

$$\nabla=\boldsymbol{u}_i\frac{\partial}{\partial y_i},\quad \boldsymbol{A}=A_j\boldsymbol{u}_j$$

则
$$\nabla A = u_i \frac{\partial}{\partial y_i}(A_j u_j) = u_i u_j \frac{\partial A_j}{\partial y_i}$$

按照标量 ϕ 之微分书写形式，矢量 A 的微分应是

$$dA = dr_p \cdot \nabla A = dy_k u_k \cdot u_i u_j \frac{\partial A_j}{\partial y_i}$$

或
$$dA = dy_k (u_k \cdot u_i) u_j \frac{\partial A_j}{\partial y_i} = dy_k \delta_{ik} u_j \frac{\partial A_j}{\partial y_i}$$

令
$$\delta_{ik} \frac{\partial A_j}{\partial y_i} = \frac{\partial A_j}{\partial y_k}$$

则得
$$dA = u_j \left(\frac{\partial A_j}{\partial y_k} dy_k \right) \tag{2-42)'$$

(三) 二阶张量场的微分

由以上讨论得出，二阶张量元素 T_{ij} 对坐标 y_k 的偏导数

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial y_k}$$

应当是三阶仿射正交张量的元素，事实上，当 T_{ij} 经变换后，其新元素为

$$T^*_{nm} = \alpha_{ni} \alpha_{mj} T_{ij}$$

因而
$$\frac{\partial T^*_{nm}}{\partial y^*_p} = \alpha_{ni} \alpha_{mj} \frac{\partial T_{ij}}{\partial y^*_p}$$

但因
$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial y^*_p} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial y^*_p} = \alpha_{pk} \frac{\partial T_{ij}}{\partial y_k}$$

所以
$$T^*_{nm,p} = \alpha_{ni} \alpha_{mj} \alpha_{pk} T_{ij,k}$$

式中
$$T^*_{nm,p} = \frac{\partial T^*_{nm}}{\partial y^*_p}; \quad T_{ij,k} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial y_k}$$

以上讨论了零到二阶张量的微分，对于更高阶的张量可依此类推。这些讨论给出一个重要启示：对于 n 阶仿射正交张量，其各分量对坐标的偏导数，必组成 $n+1$ 阶张量。但是，必须再一次提醒，这一结论只对仿射正交张量才成立。对于普遍张量的情况，将

在以后讨论。

(四) 二阶仿射正交张量的散度

如果说张量各元素对坐标求导后，各偏导数构成的新张量增阶的话，那么，张量的散度必然降阶，现以二阶张量为例加以说明。

由散度定义可知，张量的散度可写成$\nabla\cdot\Pi$，于是

$$\nabla\cdot\Pi=u_i\frac{\partial}{\partial y_i}\cdot(u_j u_k\Pi_{jk})$$

或
$$\nabla\cdot\Pi=(u_i\cdot u_j)u_k\frac{\partial\Pi_{jk}}{\partial y_i}=\delta_{ij}u_k\frac{\partial\Pi_{jk}}{\partial y_i}$$

由于
$$\delta_{ij}\frac{\partial\Pi_{jk}}{\partial y_i}=\frac{\partial\Pi_{ik}}{\partial y_i}$$

因此可得

$$\nabla\cdot\Pi=u_k\frac{\partial\Pi_{ik}}{\partial y_i}\qquad(2\text{-}43)$$

作为一个广泛应用的实例，令 $\Pi=P$，则应力张量 P 的散度可表示成

$$\nabla\cdot P=\mathrm{Div}\,P=u_k\frac{\partial p_{ik}}{\partial y_i}$$

其分量应是

$$\left.\begin{aligned}(\nabla\cdot P)_1&=\frac{\partial p_{11}}{\partial y_1}+\frac{\partial p_{21}}{\partial y_2}+\frac{\partial p_{31}}{\partial y_3}\\(\nabla\cdot P)_2&=\frac{\partial p_{12}}{\partial y_1}+\frac{\partial p_{22}}{\partial y_2}+\frac{\partial p_{32}}{\partial y_3}\\(\nabla\cdot P)_3&=\frac{\partial p_{13}}{\partial y_1}+\frac{\partial p_{23}}{\partial y_2}+\frac{\partial p_{33}}{\partial y_3}\end{aligned}\right\}\qquad(2\text{-}43)'$$

由此可见，应力张量——二阶张量的散度降阶成为一阶张量——矢量。

作为特例，如令

$$P=-pI$$

于是

$$(\nabla\cdot P)_1=-\frac{\partial p}{\partial y_1},\ (\nabla\cdot P)_2=-\frac{\partial p}{\partial y_2},\ (\nabla\cdot P)_3=-\frac{\partial P}{\partial y_3}$$

则

$$\nabla\cdot P=-\mathrm{grad}\,p \tag{2-44}$$

至于应变率张量 S 的散度 $\nabla\cdot S$ 可计算如下:

$$\nabla\cdot S=\boldsymbol{u}_i\frac{\partial}{\partial y_i}\cdot(\boldsymbol{u}_j S_{jk}\boldsymbol{u}_k)=\delta_{ij}\boldsymbol{u}_k\frac{\partial S_{jk}}{\partial y_i}=\boldsymbol{u}_k\frac{\partial S_{ik}}{\partial y_i}$$

由

$$S_{ik}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial y_k}+\frac{\partial v_k}{\partial y_i}\right)$$

于是

$$\begin{aligned}\nabla\cdot S&=\boldsymbol{u}_k\left[\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y_i}\left(\frac{\partial v_i}{\partial y_k}+\frac{\partial v_k}{\partial y_i}\right)\right]\\&=\frac{1}{2}\boldsymbol{u}_k\left[\frac{\partial^2 v_k}{\partial y_j^2}+\frac{\partial^2 v_i}{\partial y_i\partial y_k}\right]\\&=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 \boldsymbol{v}}{\partial y_i^2}+\frac{\partial}{\partial y_k}\left(\frac{\partial v_i}{\partial y_i}\right)\boldsymbol{u}_k\right]\\&=\frac{1}{2}[(\nabla\cdot\nabla)\boldsymbol{v}+\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{v})]\end{aligned}$$

第五节　张量场的积分

在力学的研究中，经常采用积分形式来表示基本方程，而其积分形式是以梯度定理、散度定理以及旋度定理为基础的。为了便于以后讨论，现引入这三个定理(不作证明)。

(一) 梯度定理(格林公式)

$$\left.\begin{aligned}&\oint_S f n_i\,dS=\int_V f_{,i}\,dV\\&\text{或}\quad\oint_S f\boldsymbol{n}\,dS=\int_V \mathrm{grad}\,f\,dV\end{aligned}\right\} \tag{2-45}$$

式中 f——标量函数 $f=f(y_1, y_2, y_3)$;

S——封闭曲面;

$\boldsymbol{V}$——S 包围的体积;

$\boldsymbol{n}$——S 的外法线方向的单位矢量

$$f_{,i}=\frac{\partial f}{\partial y_i}$$

(二) 发散定理(高斯公式)

$$\left.\begin{aligned}\oint_S v_i n_i\,dS&=\int_V v_{i,i}\,dV\\ \oint_S \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,dS&=\int_V \operatorname{div}\boldsymbol{v}\,dV\end{aligned}\right\}\tag{2-46}$$

(三) 旋度定理

$$\left.\begin{aligned}\oint_S \varepsilon_{ijk}V_j n_k\,dS&=\int_V \varepsilon_{ijk}V_{j,k}\,dV\\ \oint_S (\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{v})\,dS&=\int_V (\operatorname{rot}\boldsymbol{v})\,dV\end{aligned}\right\}\tag{2-47}$$

对于二阶张量,则有

$$\left.\begin{aligned}\oint_S P_{ij}n_i\,dS&=\int_V P_{ij,i}\,dV\\ \oint_S (\boldsymbol{n}\cdot P)\,dS&=\int_V (\nabla\cdot P)\,dV\end{aligned}\right\}\tag{2-48}$$

第六节 各向同性张量

各向同性是弹性力学和流体力学的重要概念之一。所谓各向同性,就是如果介质的力学性质与所取方向无关,则称此介质为各向同性的介质。而表示这类力学性质的张量称为各向同性张量。

在笛卡尔坐标系下,各向同性张量的数学表述是: 经坐标的任意变换后,张量的各对应元素相等。

关于坐标变换,已在第一章中作过讨论,下面只介绍本节用到

的一些变换。

（一）绕 Oy_3 轴转过 90° 的变换

a_{ij}	y_1	y_2	y_3
y_1^*	0	1	0
y_2^*	−1	0	0
y_3^*	0	0	1

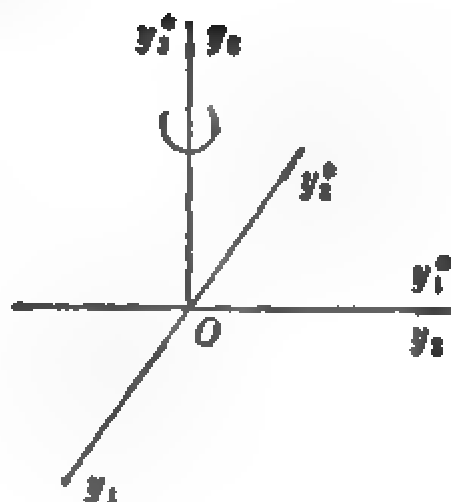


图 2-4

（二）绕 Oy_3 轴转过 180° 的变换

a_{ij}	y_1	y_2	y_3
y_1^*	−1	0	0
y_2^*	0	−1	0
y_3^*	0	0	1

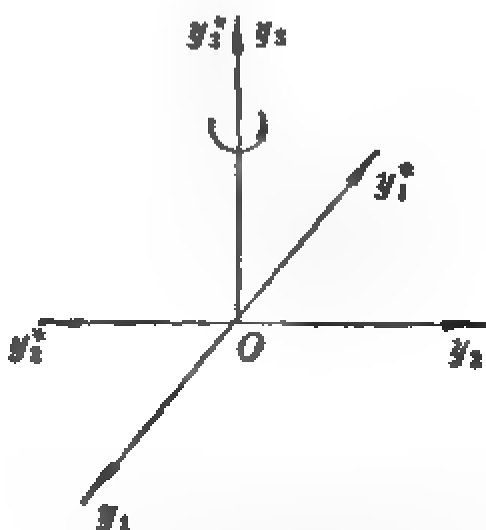


图 2-5

（三）绕 OM 轴（OM 轴和 Oy_1、Oy_2、Oy_3 轴各交成相同角度）转过 120° 的变换[1]

---

[1] 令 α_{Mi} 分别为 OM 与各坐标轴夹角的方向余弦，则

$$\alpha_{M1}^2+\alpha_{M2}^2+\alpha_{M3}^2=1$$

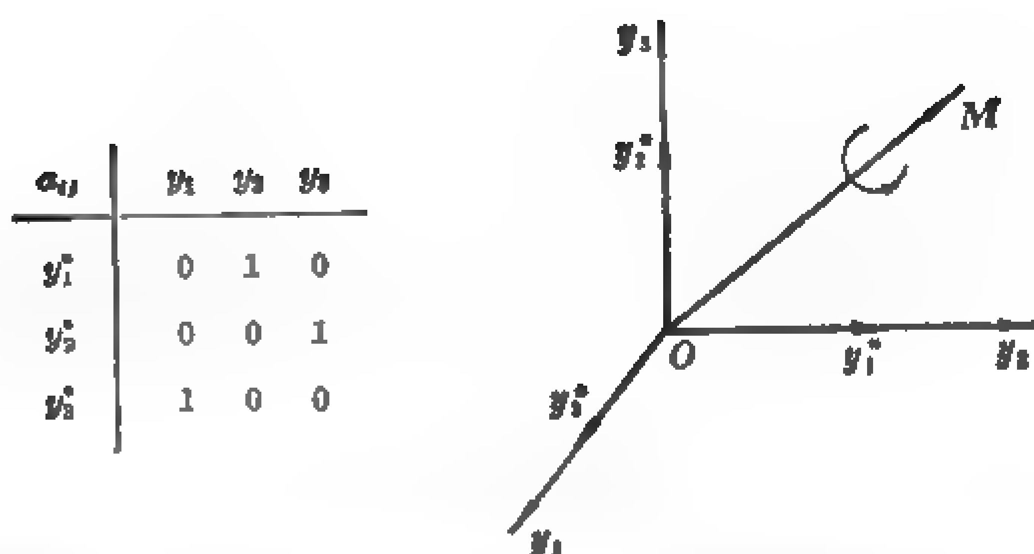
已知

$$\alpha_{M1}=\alpha_{M2}=\alpha_{M3}=\alpha$$

于是有

$$3\alpha^2=1$$

$$\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

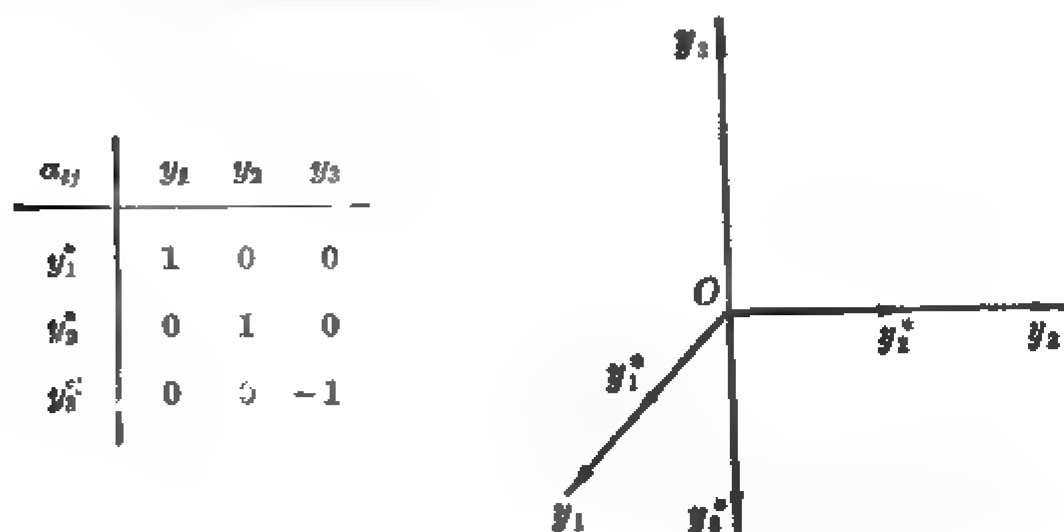


α_{ij}	y_1	y_2	y_3
y_1^*	0	1	0
y_2^*	0	0	1
y_3^*	1	0	0

图 2-6

综合以上三种特殊的旋转变换，可明显看出，其系数行列式 $|\alpha_{ij}| = +1$。这是旋转变换的共同特性。

(四)、对 Oy_3 的反射变换



α_{ij}	y_1	y_2	y_3
y_1^*	1	0	0
y_2^*	0	1	0
y_3^*	0	0	-1

图 2-7

上述变换已在第一章中介绍过，这种变换特征是：右手坐标系经变换后成为左手坐标系，而其系数行列式

$$|\alpha_{ij}| = -1$$

为表征

下面根据这四种变换，讨论从零阶到四阶各向同性张量。

1. 零阶张量

前面讨论过绝对标量(零阶张量)满足变换关系式

$$\phi^*(y_1^*, y_2^*, y_3^*)=\phi(y_1, y_2, y_3) \tag{2-49}$$

式(2-42)足以表明,绝对标量是各向同性张量。

2．一阶张量

对于一阶张量,可根据新、老坐标系下分量的关系式

$$A_i^*=\alpha_{ij}A_j$$

以及各向同性张量的定义式

$$A_i^*=A_i$$

来讨论。

先取第四种变换(即反射变换),如图 2-7 所示,$\alpha_{11}=\alpha_{22}=1$,$\alpha_{33}=-1$,$\alpha_{ij}=0(i\neq j)$,于是有

$$A_1^*=\alpha_{1j}A_j=A_1,\ A_2^*=\alpha_{2j}A_j=A_2$$

$$A_3^*=\alpha_{3j}A_j=-A_3$$

很显然,采用这种变换,第三个分量和各向同性的要求相矛盾,要各向同性,除非

$$A_3=A_3^*=0$$

完全类似,如对 Oy_1、Oy_2 作反射变换,则要求满足各向同性,必有

$$A_1=A_1^*=0,\ A_2=A_2^*=0$$

对于各向同性张量,其定义式对任意变换均应满足,因而一阶张量如果各向同性,必须满足

$$A_1=A_2=A_3=0$$

即矢量 $\boldsymbol{A}$ 为零矢量。由此可见,对于一阶张量实际上不存在各向同性。

3．二阶张量

对于二阶张量,其变换关系式是

$$\Pi_{nm}^*=\alpha_{ni}\alpha_{mj}\Pi_{ij} \tag{2-50}$$

先采用第三种变换，则有

$$\Pi_{11}^{*}=\alpha_{1i}\alpha_{1j}\Pi_{ij}=\Pi_{22}$$

$$\Pi_{22}^{*}=\alpha_{2i}\alpha_{2j}\Pi_{ij}=\Pi_{33}$$

$$\Pi_{33}^{*}=\alpha_{3i}\alpha_{3j}\Pi_{ij}=\Pi_{11}$$

同理

$$\Pi_{23}^{*}=\alpha_{2i}\alpha_{3j}\Pi_{ij}=\Pi_{31}$$

$$\Pi_{31}^{*}=\alpha_{3i}\alpha_{1j}\Pi_{ij}=\Pi_{12}$$

$$\Pi_{12}^{*}=\alpha_{1i}\alpha_{2j}\Pi_{ij}=\Pi_{23}$$

以及

$$\Pi_{13}^{*}=\Pi_{21},\ \Pi_{32}^{*}=\Pi_{13},\ \Pi_{21}^{*}=\Pi_{32}$$

但由于各向同性张量的定义，应用

$$\Pi_{11}^{*}=\Pi_{11},\ \cdots,\ \Pi_{12}^{*}=\Pi_{12},\ \cdots,\ \Pi_{21}^{*}=\Pi_{21},\ \cdots,$$

于是，要求张量各元素满足

$$\Pi_{11}=\Pi_{22}=\Pi_{33},$$

$$\Pi_{12}=\Pi_{23}=\Pi_{31},$$

$$\Pi_{21}=\Pi_{13}=\Pi_{32},$$

再取第四种变换，则有

$$\Pi_{13}^{*}=\alpha_{1i}\alpha_{3j}\Pi_{ij}=-\Pi_{13}$$

$$\Pi_{31}^{*}=\alpha_{3i}\alpha_{1j}\Pi_{ij}=-\Pi_{31}$$

这 结果和各向同性要求相矛盾，于是必有

$$\Pi_{13}=\Pi_{21}=\Pi_{32}=0$$

$$\Pi_{31}=\Pi_{23}=\Pi_{12}=0$$

由以上讨论可见，对于二阶张量 Π 如果各向同性，则必有

$$\Pi_{11}=\Pi_{22}=\Pi_{33},\ \Pi_{12}=\Pi_{23}=\Pi_{31}=\Pi_{21}=\Pi_{32}=\Pi_{13}=0$$

如令 $\Pi_{11}=\Pi_{22}=\Pi_{33}=\lambda$，则

$$\Pi_{ij}=\begin{cases}\lambda(i=j)\\0(i\neq j)\end{cases}$$

或

$$[\Pi_{ij}]=\begin{bmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\lambda I \tag{2-50}$$

由式(2-50)可见，对于各向同性之二阶张量应是

$$\Pi=\lambda I$$

不言而喻，$I=[\delta_{ij}]$ 是二阶各向同性张量。

理想流体的应力张量，其元素的大小与方向无关，因而是各向同性张量，正因为如此，理想流体应力张量 P 可表示成

$$\left.\begin{aligned}P&=-pI=-p[\delta_{ij}]\\ p_{ij}&=-p\delta_{ij}\end{aligned}\right\} \tag{2-51}$$

式中 $\qquad p_{ij}=\boldsymbol{u}_i\cdot P\cdot\boldsymbol{u}_j=(-p)[\boldsymbol{u}_i\cdot I\cdot\boldsymbol{u}_j]=-p\delta_{ij}$

4．三阶张量

对于三阶张量，其变换式为

$$\Pi^*_{pqr}=\alpha_{pi}\alpha_{qj}\alpha_{rk}\Pi_{ijk}.$$

由于 i、j、k 均取 1、2、3，所以对于 Π_{ijk} 可能有下列三种情况：

(1) $i=j=k$，例如 Π_{111}

(2) $i=j\neq k$，例如 Π_{112}

(3) $i\neq j\neq k$，例如 Π_{123}

先取第四种变换，得

$$\Pi^*_{333}=\alpha_{3i}\alpha_{3j}\alpha_{3k}\Pi_{ijk}$$

令 $i=j=k=3$，则

$$\Pi^*_{333}=-\Pi_{333}$$

同理，如对 Oy_1、Oy_2 取反射变换，则得

$$\Pi^*_{222}=-\Pi_{222},\ \Pi^*_{111}=-\Pi_{111}$$

完全类似，可证明

$$\Pi^*_{212}=-\Pi_{212},\ \Pi^*_{232}=-\Pi_{232},\ \cdots$$

根据各向同性张量的要求，第1、2两种情况的诸元素均应为零。这样，最后剩下 $i\neq j\neq k$ 的第三种情况。

对于 $i\neq j\neq k$ 的情况，先取第二种变换，则

$$\Pi_{123}^{*}=\alpha_{1i}\alpha_{2j}\alpha_{3k}\Pi_{ijk}=\Pi_{123}$$

$$\Pi_{231}^{*}=\Pi_{231},\quad \Pi_{312}^{*}=\Pi_{312}$$

再次取第三种变换，得

$$\Pi_{123}^{*}=\Pi_{231},\quad \Pi_{231}^{*}=\Pi_{312},\quad \Pi_{312}^{*}=\Pi_{123}$$

$$\Pi_{132}^{*}=\Pi_{213},\quad \Pi_{321}^{*}=\Pi_{132},\quad \Pi_{213}^{*}=\Pi_{321}$$

由以上两种变换可得

$$\Pi_{123}=\Pi_{312}=\Pi_{231}$$

$$\Pi_{213}=\Pi_{321}=\Pi_{132}$$

最后，应用第一种变换，可得

$$\Pi_{123}^{*}=-\Pi_{213},\quad \Pi_{231}^{*}=-\Pi_{132},\quad \Pi_{312}^{*}=-\Pi_{321}$$

由以上讨论可知

(1) 当 $i=j=k$ 时，各张量元素为零；

(2) 当 $i\neq j=k$ 时，各张量元素也为零；

以上两种情况对应于 i、j、k 不成排列。

(3) 当 $i\neq j\neq k$ 时，有

$$\Pi_{123}=\Pi_{231}=\Pi_{312}=-\Pi_{132}=-\Pi_{321}=-\Pi_{213}=B$$

式中　B——某一标量。

归纳以上结果，如应用顺序号 ε_{ijk}，可将各向同性三阶张量写成

$$\Pi_{ijk}=B\varepsilon_{ijk} \tag{2-52}$$

由式(2-52)可见，ε_{ijk} 是各向同性张量。必须再一次指出，当作反射变换时，ε_{ijk} 各元素均改变符号。

5．四阶张量 Π_{ijkm}

四阶各向同性张量对建立应力与应变关系具有特别重要的意

义。下面仍按照变换关系式

$$\Pi_{pqrs}=\alpha_{pi}\alpha_{qj}\alpha_{rk}\alpha_{sm}\Pi_{ijkm}$$

求得四阶各向同性张量的表达式。

四阶张量元素 Π_{ijkm} 虽然有四个下指标，但由于它们均取 1、2、3，因而四个下标至少有两个相同，现对 81 个元素作如下分类：

(1) 所有下指标均相同，例如 Π_{1111}；

(2) 各下指标有三个相同，例如 Π_{1112}；

(3) 四个下指标两两相同，可分下列三种类型

(1) $i=j\neq k=m$，例如 Π_{1122}；

(2) $i=k\neq j=m$，例如 Π_{1212}；

(3) $i=m\neq k=j$，例如 Π_{1221}。

(4) 四个下指标有两个相同，另两个不同，例如 Π_{1123}。先取第二种变换，可得

$$\Pi^*_{1113}=\alpha_{1i}\alpha_{1j}\alpha_{1k}\alpha_{3m}\Pi_{ijkm}=-\Pi_{1113}$$

$$\Pi^*_{1123}=\alpha_{1i}\alpha_{1j}\alpha_{2k}\alpha_{3m}\Pi_{ijkm}=-\Pi_{1123}$$

但作为各向同性张量，应有

$$\Pi^*_{1113}=\Pi_{1113},\quad \Pi^*_{1123}=\Pi_{1123}$$

于是有
$$\Pi_{1113}=\Pi_{1123}=0$$

依此类推，可证明第二类和第四类张量元素均为零。

再取第二种变换，并根据各向同性张量的定义式，可得

$$\Pi_{1111}=\Pi_{2222}=\Pi_{3333}$$

及
$$\Pi_{1122}=\Pi_{2211},\quad \Pi_{3311}=\Pi_{1133},\quad \Pi_{2233}=\Pi_{3322}$$

最后，取第三种变换，则有

$$\Pi^*_{1122}=\alpha_{1i}\alpha_{1j}\alpha_{2k}\alpha_{2m}\Pi_{ijkm}=\Pi_{2233}$$

由以上变换所得结果，可归纳为

$$\Pi_{1122}=\Pi_{2211}=\Pi_{2233}=\Pi_{3322}=\Pi_{1133}=\Pi_{3311}$$

或对于四阶各向同性张量，当 $i=j\neq k=m$ 时，各元素均相等。

按照以上讨论，还可推广到第三类中的(2)、(3)两种情况，于是可将最后结果归纳如下：

(1) $\Pi_{1111}=\Pi_{2222}=\Pi_{3333}$；

(2) $i=j\neq k=m$ 时，各元素相等，令为 λ；

(3) $i=k\neq j=m$ 时，各元素相等，令为 μ'；

(4) $i=m\neq j=k$ 时，各元素相等，令为 γ'；

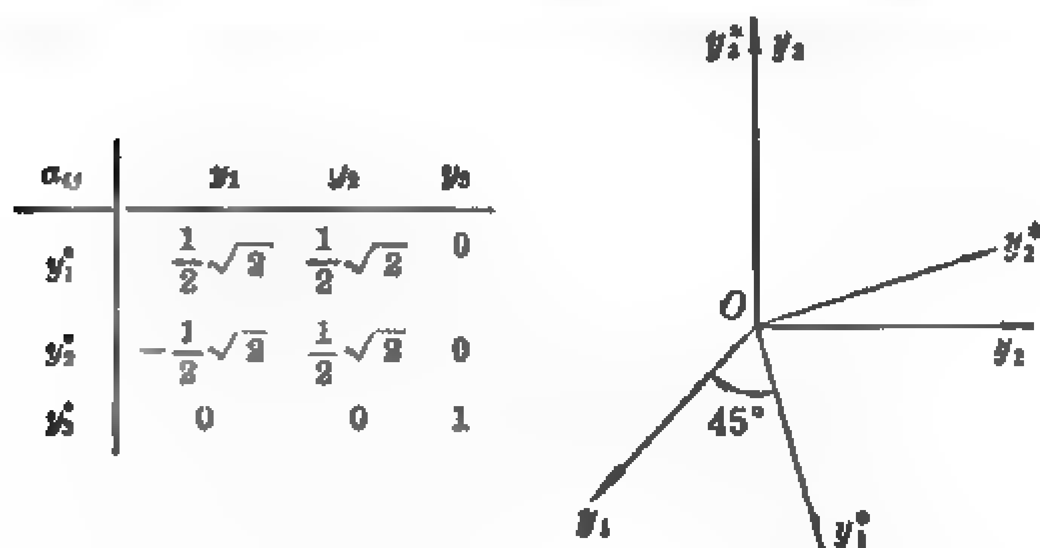
(5) 所有不包括(1)～(4)者均为零。

对于属(3)、(4)两类的张量元素分别用

$$\left.\begin{aligned}\Pi_{ijkm}=\mu'\delta_{ik}\delta_{jm}(i=k\neq j=m)\\ \Pi_{ijkm}=\gamma'\delta_{im}\delta_{jk}(i=m\neq j=k)\end{aligned}\right\}\tag{a}$$

表示。这样只须对(1)、(2)两类中所确定的诸张量元素写出适当关系式，就可求得四阶各向同性张量 Π_{ijkm} 的最后关系式，为此再取一特殊变换。

如图 2-8 所示，当以 Oy_3 为转动轴，转过 45° 的角度，则有



α_{ij}	y_1	y_2	y_3
y_1^*	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	0
y_2^*	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	0
y_3^*	0	0	1

图 2-8

$$\begin{aligned}\Pi^*_{1111}=\alpha_{1i}\alpha_{1j}\alpha_{1k}\alpha_{1m}\Pi_{ijkm}&=\alpha_{11}\alpha_{11}\alpha_{11}\alpha_{11}\Pi_{1111}+\alpha_{12}\alpha_{12}\alpha_{11}\alpha_{11}\Pi_{2211}\\&+\alpha_{12}\alpha_{12}\alpha_{12}\alpha_{12}\Pi_{2222}+\alpha_{11}\alpha_{11}\alpha_{12}\alpha_{12}\Pi_{1122}\\&+\alpha_{11}\alpha_{12}\alpha_{12}\alpha_{11}\Pi_{1221}+\alpha_{12}\alpha_{11}\alpha_{11}\alpha_{12}\Pi_{2112}\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{4}[\Pi_{1111}+\Pi_{2222}+\Pi_{1122}+\Pi_{2211}+\Pi_{1221}+\Pi_{2112}]$$

上式中最后两个张量元素 Π_{2112}、Π_{1221} 实际属于第(3)、(4)类并已在式(a)中表示出，因此，当求第(1)、(2)两类张量元素表达式时，可认为第(3)、(4)类中的张量元素为零，于是可得

$$\Pi^*_{1111}=\Pi_{1111}-\frac{1}{4}(\Pi_{1111}+\Pi_{2222}+\Pi_{1122}+\Pi_{2211})$$

因已证明，$\Pi_{1111}=\Pi_{2222}$，$\Pi_{1122}=\Pi_{2211}$，代入上式，立即可得

$$\Pi_{1111}=\Pi_{1122}$$

这样，可将第(1)、(2)两类张量元素归纳为一个关系式，即

$$\Pi_{ijkm}=\lambda\delta_{ij}\delta_{km}\begin{pmatrix} i=j\neq k=m \\ i=j=k=m \end{pmatrix}$$

同样，λ 也是某一标量。

至此，求得四阶各向同性张量的最后表达式

$$\Pi_{ijkm}=\lambda\delta_{ij}\delta_{km}+\mu'\delta_{ik}\delta_{jm}+\gamma'\delta_{im}\delta_{jk} \tag{2-53}$$

令

$$\mu'=\mu+\gamma,\ \gamma'=\mu-\gamma$$

上式又可改写为

$$\Pi_{ijkm}=\lambda\delta_{ij}\delta_{km}+(\mu+\gamma)\delta_{ik}\delta_{jm}+(\mu-\gamma)\delta_{im}\delta_{jk}$$

或

$$\Pi_{ijkm}=\lambda\delta_{ij}\delta_{km}+\mu(\delta_{ik}\delta_{jm}+\delta_{im}\delta_{jk})+\gamma(\delta_{ik}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jk}) \tag{2-54}$$

如果 Π_{ijkm} 具有对称性质，即

$$\left.\begin{aligned} \Pi_{ijkm}=\Pi_{jikm} \\ \Pi_{ijkm}=\Pi_{ijmk} \end{aligned}\right\}$$

则式(2-54)又可改写成

$$\Pi_{ijkm}=\lambda\delta_{ij}\delta_{km}+\mu(\delta_{ik}\delta_{jm}+\delta_{im}\delta_{jk}) \tag{2-55}$$

式(2-54)、(2-55)即为所需要的四阶各向同性张量元素的表达式。

应用以上结果来讨论应力与应变的关系式，即建立起所谓的

本构方程。

一般的牛顿粘性流体，其应力由两部分组成：一是理想流体的静压力 $-p\delta_{ij}$，二是由粘性引起的应力 τ_{ij}，实际应力为

$$p_{ij}=-p\,\delta_{ij}+\tau_{ij},\quad P=-pI+\tau \tag{2-56}$$

对于牛顿流体，应力 τ_{ij} 和应变 S_{km} 成线性关系，即

$$\tau_{ij}=E_{ijkm}S_{km} \tag{2-57}$$

式中　E_{ijkm}——四阶各向同性对称张量元素；

　　S_{km}——应变率张量元素。

E_{ijkm} 所以是对称的张量元素，是由于 τ_{ij} 及 S_{km} 对称。

根据以上两式，可得

$$p_{ij}=-p\,\delta_{ij}+E_{ijkm}S_{km}$$

因已知　　$E_{ijkm}=\lambda\,\delta_{ij}\delta_{km}+\mu(\delta_{ik}\delta_{jm}+\delta_{im}\delta_{jk})$

代入上式，得

$$p_{ij}=-p\,\delta_{ij}+\lambda\,\delta_{ij}\delta_{km}S_{km}+\mu(\delta_{ik}\delta_{jm}+\delta_{im}\delta_{jk})S_{km}$$

由于　　$\delta_{ij}\delta_{km}S_{km}=\delta_{ij}S_{kk},\ \delta_{ik}\delta_{jm}S_{km}=S_{ij}$

$$\delta_{im}\delta_{jk}S_{km}=S_{ij}$$

则上式可改写成

$$\left.\begin{aligned}p_{ij}&=-p\,\delta_{ij}+\lambda\,\delta_{ij}S_{kk}+2\mu S_{ij}\\ \text{或}\quad P&=-pI+\lambda(\mathrm{div}\,\boldsymbol{v})I+2\mu S\end{aligned}\right\} \tag{2-58}$$

式(2-58)表明，牛顿粘性流体的应力除静压力以外，还有与相对体积变化率 $S_{kk}=\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}$ 以及与变形率张量元素成正比例的应力；λ 称第二粘性系数。

对式(2-58)作指标缩减，即得

$$p_{ii}=-p\,\delta_{ii}+\lambda\,\delta_{ii}S_{kk}+2\mu S_{ii}$$

或　　$$p_{ii}=-3p+(3\lambda+2\mu)S_{ii}$$

在静止时，$S_{ii}=0$，故

$$p_{ii}=-3p$$

由于分子运动与宏观流动的时间量级相差太大，故分子运动效果不受宏观流动的影响，因此，流动时纯由分子运动引起的正应力情况应与静止情况时相同，故流动时仍有

$$-3p=-3p+(3\lambda+2\mu)S_{ii}$$

在一般可压缩流动情况下 $S_{ii}\neq 0$，则

$$3\lambda+2\mu=0$$

$$\lambda=-\frac{2}{3}\mu$$

对于满足 $p_{11}+p_{22}+p_{33}=-3p$ 的流体，称斯托克斯流体。

于是，最后可得应力与应变关系式如下：

$$p_{ij}=-p\,\delta_{ij}+2\mu S_{ij}-\frac{2}{3}\mu\,\delta_{ij}S_{kk} \qquad (2\text{-}59)$$

已知 $$S_{ii}=\mathrm{div}\,\boldsymbol{v},\quad S_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial y_j}+\frac{\partial v_j}{\partial y_i}\right)$$

代入式(2-59)，又可得

$$\left.\begin{aligned} p_{ij}&=\quad p\,\delta_{ij}+\mu\left(\frac{\partial v_i}{\partial y_j}+\frac{\partial v_j}{\partial y_i}\right)-\frac{2}{3}\mu\,\delta_{ij}\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}\\ P&=-pI+2\mu S-\frac{2}{3}\mu I\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}\end{aligned}\right\} \qquad (2\text{-}60)$$

或

$$P=-pI+2\mu S-\frac{2}{3}\mu I\,\mathrm{tr}\,D$$

式(2-60)就是通常以速度梯度表示的应力关系式。

第七节　张量的主轴、主值和张量的数性不变量

已知在笛卡尔坐标系下，过一点作法线方向为 $\boldsymbol{n}$ 的平面，在此平面上的应力 $\boldsymbol{p}_n$ 可用三个坐标面上的应力 $\boldsymbol{p}_i$ 表示，即

$$\boldsymbol{p}_n = \alpha_{ni}\boldsymbol{p}_i$$

如令 $\alpha_{ni}=n_i$，则

$$\boldsymbol{p}_n = n_i\boldsymbol{p}_i \tag{a}$$

对于这一平面的选取未作任何规定。在一般情况下，此应力可能有三个分量，其一垂直于该平面（法向应力），而其他两个则和平面平行（切应力）。现在设想，如果所取的平面，其应力只有法向应力，则此时 $\boldsymbol{p}_n$ 与 $\boldsymbol{n}$ 共线，由于 $\boldsymbol{n}$ 是单位矢量，所以

$$\boldsymbol{p}_n = \sigma\boldsymbol{n} \tag{b}$$

式中　σ 为该平面上应力 $\boldsymbol{p}_n$ 的绝对值。

将式(b)代入式(a)得

$$\sigma\boldsymbol{n} = n_i\boldsymbol{p}_i$$

上式左右两边分别与 $\boldsymbol{u}_j$ 作数性积，则

$$\sigma\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{u}_j = n_i(\boldsymbol{p}_i\cdot\boldsymbol{u}_j)$$

或

$$\sigma n_j = n_i p_{ij}$$

应用 $n_j=\delta_{ij}n_i$，代入上式后，得

$$\sigma n_i\delta_{ij} = n_i p_{ij}$$

或

$$n_i(p_{ij}-\sigma\delta_{ij})=0$$

上式中的下指标 i 是求和指标，而 j 是指定指标，展开之，得

$$\left.\begin{aligned} n_1(p_{11}-\sigma)+n_2p_{12}+n_3p_{13}=0\\ n_1p_{21}+n_2(p_{22}-\sigma)+n_3p_{23}=0\\ n_1p_{31}+n_2p_{32}+n_3(p_{33}-\sigma)=0 \end{aligned}\right\} \tag{c}$$

对所求主应力是否存在，取决于 n_1、n_2、n_3 是否有非零解。显然，由于式(c)是线性齐次方程组，如果此方程有非零解。则系数行列式必须为零，即

$$\begin{vmatrix} p_{11}-\sigma & p_{12} & p_{13}\\ p_{21} & p_{22}-\sigma & p_{23}\\ p_{31} & p_{32} & p_{33}-\sigma \end{vmatrix}=0 \tag{2-61}$$

σ 为应力张量 P 的主值（或特征值），$\boldsymbol{n}$ 为 P 的主方向（或特征方向）。

将上列行列式展开，得

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0 \tag{d}$$

式中

$$I_1 = p_{11} + p_{22} + p_{33} = p_{ii} = \mathrm{tr}\, P$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p_{22} & p_{23} \\ p_{32} & p_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p_{11} & p_{13} \\ p_{31} & p_{33} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}(p_{ii}p_{jj} - p_{ij}p_{ji}) = \frac{1}{2}[(\mathrm{tr}P)^2 - P:P]$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{vmatrix} = \mathrm{det} P$$

除此以外，由式(d)可知，式(d)是 σ 的三次方程，所以有三个 σ 解，现令其为 σ_1、σ_2、σ_3，于是

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$

$$I_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1$$

$$I_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3$$

下面再介绍张量主值 σ、主方向 $\boldsymbol{n}$ 的一些特性。

（一）主值 σ 与坐标变换无关

对于新坐标系

$$n_r^* p_{rs}^* = \sigma^* n_s^*$$

由于

$$p_{rs}^* = \alpha_{ri}\alpha_{sj} p_{ij}$$

$$n_r^* = \alpha_{rq} n_q, \quad n_s^* = \alpha_{sp} n_p$$

代入之，得

$$\alpha_{ri}\alpha_{sj} p_{ij} \alpha_{rq} n_q = \sigma^* \alpha_{sp} n_p$$

上式左、右两边各乘以 α_{st}，则得

$$(\alpha_{st}\alpha_{sj})(\alpha_{ri}\alpha_{rq}) p_{ij} n_q = \sigma^* (\alpha_{st}\alpha_{sp}) n_p$$

根据坐标系为正交的条件，应有

$$\alpha_{st}\alpha_{sj}=\delta_{tj},\ \alpha_{rt}\alpha_{rq}=\delta_{tq}$$

$$\alpha_{st}\alpha_{sp}=\delta_{tp}$$

代入上式，可得

$$\delta_{tq}\delta_{tj}p_{ij}n_q=\sigma^*\delta_{tp}n_p$$

又由于 $$\delta_{ti}(\delta_{tq}p_{ij})=\delta_{tj}p_{qj}=p_{qt},\ \delta_{tp}n_p=n_t$$

于是得 $$n_q p_{qt}=\sigma^* n_t$$

如果对老坐标系直接写出主方向上的应力关系式，应有

$$p_{qt}n_q=\sigma n_t$$

于是 $\sigma^*=\sigma$，即张量 P 的主值与坐标变换无关。这一结论是很重要的，因为由此可推出 I_1、I_2、I_3 亦不随坐标变换而改变。

I_1、I_2、I_3 为张量 P 的第一、第二、第三数性不变量。

以上结论是从应力张量 D 的讨论中得出的，但这些结论可推广到一般张量。

由于工程中遇到的二阶张量有许多属于对称张量，所以有必要就对称的二阶张量作某些讨论。下面着重介绍二阶对称张量的两个特性。

（二）对称张量的三个主方向互成正交

令 $\boldsymbol{n}_1$、$\boldsymbol{n}_2$、$\boldsymbol{n}_3$ 及 λ_1、λ_2、λ_3 分别为对称二阶张量 Π 的三个主方向及三个主值，则

$$\Pi\cdot\boldsymbol{n}_1=\lambda_1\boldsymbol{n}_1$$

$$\Pi\cdot\boldsymbol{n}_2=\lambda_2\boldsymbol{n}_2$$

$$\Pi\cdot\boldsymbol{n}_3=\lambda_3\boldsymbol{n}_3$$

现将第一分式与 $\boldsymbol{n}_2$ 作数性积，第二式与 $\boldsymbol{n}_1$ 作数性积，则有

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{n}_2\cdot\Pi\cdot\boldsymbol{n}_1=\lambda_1(\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2)\\ \boldsymbol{n}_1\cdot\Pi\cdot\boldsymbol{n}_2=\lambda_2(\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2)\end{aligned}\right\}$$

如果二阶张量 Π 是对称的，则 $\Pi=\Pi^T$，得

$$\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{\Pi}=\boldsymbol{\Pi}^T\cdot\boldsymbol{n}_1=\boldsymbol{\Pi}\cdot\boldsymbol{n}_1$$

于是
$$\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{\Pi}\cdot\boldsymbol{n}_2=\boldsymbol{n}_2\cdot\boldsymbol{\Pi}\cdot\boldsymbol{n}_1$$

代入上式，即得

$$\lambda_1(\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2)=\lambda_2(\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2)$$

或
$$(\lambda_1-\lambda_2)(\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2)=0$$

在一般情况下，张量 $\boldsymbol{\Pi}$ 的主值 $\lambda_1\neq\lambda_2$，要使上式满足，必须 $\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2=0$，即 $\boldsymbol{n}_1\perp\boldsymbol{n}_2$。同理可证 $\boldsymbol{n}_2\perp\boldsymbol{n}_3$，于是有

$$\boldsymbol{n}_1\perp\boldsymbol{n}_2\perp\boldsymbol{n}_3$$

即三个主方向互成正交。

（三）如果 $\boldsymbol{\Pi}$ 是二阶对称张量，则其主值必为实数。由

$$\Pi_{ij}n_i=\lambda n_j \qquad (a)$$

以及 λ 特征方程的系数均为实数这一事实，如果 λ 为虚数，则必有

$$\lambda_1=\alpha+i\beta,\ \lambda_2=\alpha-i\beta,\ \lambda_3$$

其中 α、β、λ_3 为实数，而 λ_1、λ_2 为共轭虚数。将式(a)两边乘以 $\bar{n}_j$，得

$$\bar{n}_j\Pi_{ij}n_i=\lambda\bar{n}_jn_j$$

如果对上列方程两边同时取共轭数，由于 Π_{ij} 为实数，所以

$$n_j\Pi_{ij}\bar{n}_i=\bar{\lambda}n_j\bar{n}_j$$

但因
$$\Pi_{ij}=\Pi_{ji}$$

所以
$$n_j\Pi_{ij}\bar{n}_i=n_i\Pi_{ji}\bar{n}_j=\bar{n}_j\Pi_{ij}n_i=\lambda\bar{n}_jn_j$$

于是

$$(\lambda-\bar{\lambda})n_j\bar{n}_j=0 \qquad (b)$$

由于
$$n_j\bar{n}_j\neq0$$

要满足式(b)，应使

$$\lambda-\bar{\lambda}=0$$

由此可见，λ 必为实数。

第八节 以笛卡尔张量表示的力学基本方程

以上引进了张量的概念并讨论了张量的一些运算，讨论的目的是为了熟悉张量，但最终目的是应用张量来建立力学基本方程。

每一个力学基本方程都是根据普遍定律来确定的。在第一章中已经提到，坐标系的选取将影响到方程的繁简程度，下面还会看到，表达物理量的方式也会影响方程的繁简。

（一）以张量表示的力学基本方程之微分形式

1．连续方程

连续方程是以质量守恒定律为根据建立起来的基本方程之一，它可写成

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho\boldsymbol{v})=0\\ \text{或}\quad&\frac{D\rho}{Dt}+\rho\operatorname{div}\boldsymbol{v}=0\end{aligned}\right\}\tag{2-62}$$

由于 $\operatorname{div}\boldsymbol{v}=\operatorname{tr}\boldsymbol{D}$，如以位移张量表示，则有

$$\frac{D\rho}{Dt}+\rho\operatorname{tr}\boldsymbol{D}=0\tag{2-62$'$}$$

2．运动方程

在笛卡尔坐标系下，以应力表示的运动方程可写成

$$\left.\begin{aligned}\rho\frac{Dv_1}{Dt}&=\rho f_1+\left(\frac{\partial p_{11}}{\partial y_1}+\frac{\partial p_{21}}{\partial y_2}+\frac{\partial p_{31}}{\partial y_3}\right)\\ \rho\frac{Dv_2}{Dt}&=\rho f_2+\left(\frac{\partial p_{12}}{\partial y_1}+\frac{\partial p_{22}}{\partial y_2}+\frac{\partial p_{32}}{\partial y_3}\right)\\ \rho\frac{Dv_3}{Dt}&=\rho f_3+\left(\frac{\partial p_{13}}{\partial y_1}+\frac{\partial p_{23}}{\partial y_2}+\frac{\partial p_{33}}{\partial y_3}\right)\end{aligned}\right\}\tag{2-63}$$

式中 f_1、f_2、f_3 分别为单位质量之质量力 f 的三个分量，对式

(2-63)各分式乘以单位矢量 $\boldsymbol{u}_1$、$\boldsymbol{u}_2$、$\boldsymbol{u}_3$，然后相加，则由式(2-43)，立即可得

$$\rho\frac{D\boldsymbol{v}}{Dt}=\rho\boldsymbol{f}+\nabla\cdot P \tag{2-64}$$

由此可见，应用张量表示的式(2-64)，代表了式(2-63)的三个分式，不仅如此，其形式也大为简化。

如令 $\frac{D\boldsymbol{v}}{Dt}=0$，则得弹性力学中的平衡方程

$$\rho\boldsymbol{f}+\nabla\cdot P=0 \tag{2-64$'$}$$

上两式是以应力表示的运动微分方程，如利用式(2-60)，则式(2-64)可改写成以速度梯度表示的运动微分方程如下：

$$\rho\frac{D\boldsymbol{v}}{Dt}=\rho\boldsymbol{f}+\nabla\cdot\left(-pI+2\mu S-\frac{2}{3}\mu I\ \mathrm{tr}\ S\right)$$

已知 $\nabla\cdot(pI)=\mathrm{grad}\ p$, $\nabla\cdot(I\ \mathrm{tr}\ S)=\mathrm{grad}(\mathrm{tr}\ S)$

则

$$\rho\frac{DV}{Dt}=\rho\boldsymbol{f}-\mathrm{grad}\,p+2\mu\nabla\cdot S-\frac{2}{3}\mu\ \mathrm{grad}(\mathrm{tr}\ S) \tag{2-65}$$

注意：上式假定 $\mu=\mathrm{const}$。

将上式右面 $\pm\mu\ \mathrm{grad}(\mathrm{tr}\ S)$，则得

$$\rho\frac{D\boldsymbol{v}}{Dt}=\rho\boldsymbol{f}-\mathrm{grad}\,p+\frac{1}{3}\mu\ \mathrm{grad}(\mathrm{tr}\ S)+\mu[2\nabla\cdot S-\mathrm{grad}(\mathrm{tr}\ S)]$$

应用 $[2\nabla\cdot S-\mathrm{grad}(\mathrm{tr}\ S)]=(\nabla\cdot\nabla)\boldsymbol{v}$

则最后可得

$$\rho\frac{D\boldsymbol{v}}{Dt}=\rho\boldsymbol{f}-\mathrm{grad}\,p+\frac{1}{3}\mu\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{v})+\mu(\nabla\cdot\nabla)\boldsymbol{v} \tag{2-66}$$

3．能量方程

能量方程可采用运动方程与速度 $\boldsymbol{v}$ 的数性积求得。由式(2-64)得

$$\rho\boldsymbol{v}\cdot\frac{D\boldsymbol{v}}{Dt}=\rho\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}+(\nabla\cdot P)\cdot\boldsymbol{v} \tag{a}$$

因
$$\boldsymbol{v}\cdot\frac{D\boldsymbol{v}}{Dt}=\frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{2}v^2\right)$$

所以
$$\rho\boldsymbol{v}\cdot\frac{D\boldsymbol{v}}{Dt}=\rho\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}v^2\right)+\rho\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{grad}\left(\frac{1}{2}v^2\right)$$

利用连续方程，则有

$$\frac{1}{2}v^2\left[\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v})\right]=\frac{1}{2}v^2\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{1}{2}v^2[\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v})]=0$$

于是

$$\begin{aligned}\rho\boldsymbol{v}\cdot\frac{D\boldsymbol{v}}{Dt}&=\rho\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}v^2\right)+\frac{1}{2}v^2\frac{\partial\rho}{\partial t}\\&\quad+\rho\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{grad}\left(\frac{1}{2}v^2\right)+\frac{1}{2}v^2[\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v})]\\&=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho v^2\right)+\nabla\cdot\left(\frac{1}{2}\rho v^2\boldsymbol{v}\right)\end{aligned}$$

或

$$\rho\boldsymbol{v}\cdot\frac{D\boldsymbol{v}}{Dt}=\frac{\partial}{\partial t}(K)+\nabla\cdot(K\boldsymbol{v}) \tag{b}$$

式中　$K=\frac{1}{2}\rho v^2$ 为单位体积的动能。

对式(a)中右边的第二项，可利用式(2-56)

$$P=-pI+\tau$$

于是　$$\nabla\cdot P=\nabla\cdot(-pI)+\nabla\cdot\tau=-\mathrm{grad}\,p+\nabla\cdot\tau$$

则　$$(\nabla\cdot P)\cdot\boldsymbol{v}=-(\mathrm{grad}\,p)\cdot\boldsymbol{v}+(\nabla\cdot\tau)\cdot\boldsymbol{v}$$

因　$$\nabla\cdot(p\boldsymbol{v})=\mathrm{grad}\,p\cdot\boldsymbol{v}+p\nabla\cdot\boldsymbol{v}$$

$$(\nabla\cdot\tau)\cdot\boldsymbol{v}=\nabla\cdot(\tau\cdot\boldsymbol{v})-\tau:\nabla\boldsymbol{v}$$

所以

$$(\nabla\cdot P)\cdot\boldsymbol{v}=-\nabla\cdot(p\boldsymbol{v})+p\nabla\cdot\boldsymbol{v}+\nabla\cdot(\tau\cdot\boldsymbol{v})-\tau:\nabla\boldsymbol{v} \tag{c}$$

将式(b)、(c)均代入式(a)，立即可得

$$\frac{\partial K}{\partial t}+\nabla\cdot(K\boldsymbol{v})=\rho\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}\quad\nabla(p\boldsymbol{v})+p\nabla\cdot\boldsymbol{v}+\nabla\cdot(\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{v})-\boldsymbol{\tau}:\nabla\boldsymbol{v}\ (d)$$

由于
$$\boldsymbol{\tau}:\nabla\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\tau}:S=\tau_{ij}S_{ij}$$

式中 $\boldsymbol{\tau}:S$——耗散函数 Φ

将 Φ 代入式(d)，得能量方程

$$\frac{\partial K}{\partial t}+\nabla\cdot(K\boldsymbol{v})=\rho\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}-\nabla(p\boldsymbol{v})+p\nabla\cdot\boldsymbol{v}$$

$$+\nabla\cdot(\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{v})-\Phi \qquad (2\text{-}67)$$

利用式(2-58)，可将 Φ 表示如下：

$$\tau_{ij}S_{ij}=[\lambda(\mathrm{div}\,\boldsymbol{v})\delta_{ij}+2\mu S_{ij}]S_{ij}$$

或
$$\Phi=\tau_{ij}S_{ij}=[\lambda(\mathrm{div}\,\boldsymbol{v})^2+2\mu S_{ij}^2]$$

如将

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}=\frac{\partial v_1}{\partial y_1}+\frac{\partial v_2}{\partial y_2}+\frac{\partial v_3}{\partial y_3}\quad 及\quad S_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial y_j}+\frac{\partial v_j}{\partial y_i}\right)$$

代入，则

$$\Phi=\lambda\left[\frac{\partial v_1}{\partial y_1}+\frac{\partial v_2}{\partial y_2}+\frac{\partial v_3}{\partial y_3}\right]^2+2\mu\left[\left(\frac{\partial v_1}{\partial y_1}\right)^2+\left(\frac{\partial v_2}{\partial y_2}\right)^2+\left(\frac{\partial v_3}{\partial y_3}\right)^2\right.$$

$$+\frac{1}{4}\left(\frac{\partial v_1}{\partial y_2}+\frac{\partial v_2}{\partial y_1}\right)^2+\frac{1}{4}\left(\frac{\partial v_2}{\partial y_3}+\frac{\partial v_3}{\partial y_2}\right)^2$$

$$\left.+\frac{1}{4}\left(\frac{\partial v_3}{\partial y_1}+\frac{\partial v_1}{\partial y_3}\right)^2\right]$$

对于理想流体，则有 $P=-pI$，于是式(2-67)简化为

$$\frac{\partial K}{\partial t}+\nabla\cdot(K\boldsymbol{v})=\rho\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}-\mathrm{grad}\,p\cdot\boldsymbol{v} \qquad (2\text{-}67)'$$

(二) 基本方程的守恒形式

近年来，人们对方程守恒形式的建立有所关注。所谓守恒形式，就是微分方程中只包含有矢量分量对坐标偏导数的项及自由项，如

$$\frac{\partial F_1}{\partial y_1}+\frac{\partial F_2}{\partial y_2}+\frac{\partial F_3}{\partial y_3}=F_4$$

式中　F_1、F_2、F_3、F_4 均为 y_i 的函数，假定 $F_4=0$，则称完全守恒形式(或强守恒形式)，反之为弱守恒形式。

1．连续方程的守恒形式

在笛卡尔坐标系下，连续性方程无须作任何变换，它本身就是守恒形式，即

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial y_1}(\rho v_1)+\frac{\partial}{\partial y_2}(\rho v_2)+\frac{\partial}{\partial y_3}(\rho v_3)=0 \qquad (2\text{-}68)$$

2．运动方程的守恒形式

由式(2-64)

$$\rho\frac{D\boldsymbol{v}}{Dt}=\nabla\cdot P+\rho\boldsymbol{f}$$

上式左面，利用连续方程可改写成

$$\rho\frac{D\boldsymbol{v}}{Dt}=\rho\left[\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{grad}\ \boldsymbol{v}\right]+\boldsymbol{v}\left[\frac{\partial \rho}{\partial t}+\mathrm{div}(\rho\boldsymbol{v})\right]$$

如令 $\boldsymbol{f}=0$，式(2-64)则可写成

$$\frac{\partial(\rho\boldsymbol{v})}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}-P)=0$$

或展开之，得

$$\frac{\partial(\rho v_1)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial y_1}(\rho v_1 v_1-p_{11})+\frac{\partial}{\partial y_2}(\rho v_1 v_2-p_{21})$$
$$+\frac{\partial}{\partial y_3}(\rho v_1 v_3-p_{31})=0$$

$$\frac{\partial(\rho v_2)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial y_1}(\rho v_2 v_1-p_{12})+\frac{\partial}{\partial y_2}(\rho v_2 v_2-p_{22})$$
$$+\frac{\partial}{\partial y_3}(\rho v_2 v_3-p_{32})=0$$

$$\frac{\partial(\rho v_3)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial y_1}(\rho v_3 v_1-p_{13})+\frac{\partial}{\partial y_2}(\rho v_3 v_2-p_{23})$$

$$+\frac{\partial}{\partial y_3}(\rho v_3 v_3 - p_{33}) = 0 \tag{2-69}$$

式(2-69)称运动方程的守恒形式。其中 $\rho\boldsymbol{vv}-P$ 称动量密流张量，其分量为

$$\boldsymbol{u}_i\cdot(\rho\boldsymbol{vv}-P)\cdot\boldsymbol{u}_j=\rho v_i v_j - P_{ij}$$

是通过外法线方向为 $\boldsymbol{u}_i$ 之单位面积的动量密流沿 $\boldsymbol{u}_j$ 方向的投影分量。

式(2-69)为强守恒形式。如 $\boldsymbol{f}\neq 0$，则将得到弱守恒形式。

3．能量方程的守恒形式

对于绝热流动的能量方程可写成(略去质量力)

$$\rho\frac{De}{Dt}=\nabla\cdot(P\cdot\boldsymbol{v}) \tag{a}$$

式中 $e=u+\frac{v^2}{2}$ 为单位质量所具有的能量(内能与动能之和)。由于

$$\rho\frac{De}{Dt}=\rho\left(\frac{\partial e}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla e\right)+e\left[\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla(\rho\boldsymbol{v})\right]$$

或

$$\rho\frac{De}{Dt}=\frac{\partial(\rho e)}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho e\boldsymbol{v})$$

代入式(a)，则

$$\frac{\partial(\rho e)}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho e\boldsymbol{v}-P\cdot\boldsymbol{v})=0 \tag{b}$$

显然，式(b)也是强守恒形式，其中 $\rho e\boldsymbol{v}-P\cdot\boldsymbol{v}$ 为能量密流矢量。如将式(b)展开得

$$\frac{\partial(\rho e)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial y_1}(\rho e v_1 - p_{11}v_1 - p_{12}v_2 - p_{13}v_3)$$

$$+\frac{\partial}{\partial y_2}(\rho e v_2 - p_{21}v_1 - p_{22}v_2 - p_{23}v_3)$$

$$
+\frac{\partial}{\partial y_3}(\rho e v_3-p_{31}v_1-p_{32}v_2-p_{33}v_3)=0 \qquad (2\text{-}70)
$$

综合以上结果，可将守恒形式的连续方程、运动方程以及能量方程归纳为

$$
\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t}+\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial y_1}+\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial y_2}+\frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial y_3}=0 \qquad (2\text{-}71)
$$

式(2-71)的 $\boldsymbol{U}$、$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{F}$、$\boldsymbol{G}$ 分别为

$$
\boldsymbol{U}=\begin{bmatrix}\rho\\ \rho v_1\\ \rho v_2\\ \rho v_3\\ \rho e\end{bmatrix};\quad
\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}\rho v_1\\ -p_{11}+\rho v_1^2\\ \rho v_1 v_2-p_{12}\\ \rho v_1 v_3-p_{13}\\ \rho e v_1-p_{11}v_1-p_{12}v_2-p_{13}v_3\end{bmatrix}
$$

$$
\boldsymbol{F}=\begin{bmatrix}\rho v_2\\ \rho v_1 v_2-p_{21}\\ p_{22}+\rho v_2^2\\ \rho v_3 v_2-p_{23}\\ \rho e v_2-p_{21}v_1-p_{22}v_2-p_{23}v_3\end{bmatrix},
$$

$$
\boldsymbol{G}=\begin{bmatrix}\rho v_3\\ \rho v_1 v_3-p_{13}\\ \rho v_2 v_3-p_{23}\\ \rho v_3^2-p_{33}\\ \rho e v_3-p_{31}v_1-p_{32}v_2-p_{33}v_3\end{bmatrix}
$$

对于笛卡尔坐标系，通常可得出强守恒形式，但如采用其他坐标系（例如柱坐标系），有时可能得出弱守恒形式。

（三）基本方程的积分形式

在某些情况下，力学的基本方程常常采用积分形式，和微分形式的基本方程不同的是积分形式取介质内有限大小的控制体作为研究对象。这里先介绍导出积分形式基本方程时广泛应用的雷

诺输运方程。

1. 雷诺输运方程

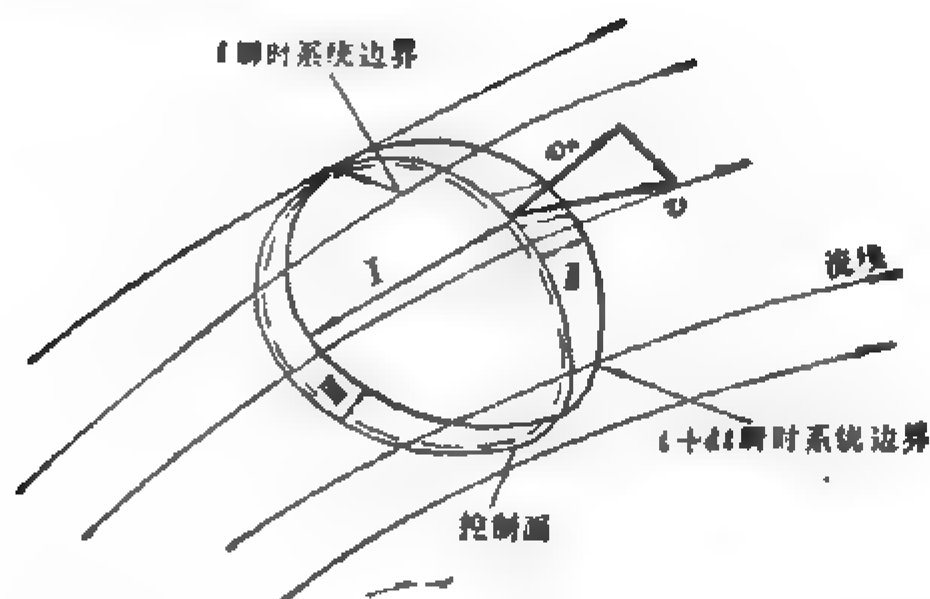


图 2-9

如图 2-9 所示。设在流场中任取一有限大小的控制体 V，这一控制体由控制面 S 所围成。假定这一控制体静止不动，而运动的流体不断地从控制体进出。以 Φ 表示控制体内流体的某一物理量（例如流体的动能），而 ϕ 表示单位质量的该物理量，则由于 ϕ 和密度 ρ 都是空间位置和时间 t 的函数，因而某瞬时 t、微元体积 V 内的 Φ 值应是

$$\Phi=\int_V \phi\rho\, dV$$

当经过 δt 以后，控制体内的流体运动到新的位置（图中的 I、II 部分），由于运动的连续性，外界流体进入控制体（图中的第 III 部分），则 Φ 随时间的变化率应是

$$\frac{D\Phi}{Dt}=\lim_{\delta t\to 0}\frac{1}{\delta t}[(\Phi_{I,t+\delta t}+\Phi_{II,t+\delta t})-(\Phi_{I,t}+\Phi_{III,t})]$$

$$=\lim_{\delta t\to 0}\frac{1}{\delta t}[(\Phi_I+\Phi_{III})_{t+\delta t}-(\Phi_I+\Phi_{III})_t]$$

$$+\lim_{\delta t\to 0}\left[\frac{\Phi_{II,t+\delta t}}{\delta t}-\frac{\Phi_{III,t+\delta t}}{\delta t}\right]$$

则
$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}=\lim_{\delta t\to 0}\left[(\Phi_I+\Phi_{III})_{t+\delta t}-(\Phi_I+\Phi_{III})_t\right]$$

而

$$\lim_{\delta t\to 0}\left[\frac{\Phi_{II,t+\delta t}}{\delta t}-\frac{\Phi_{III,t+\delta t}}{\delta t}\right]=\int_{(II)S}\phi\rho\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{S}-\int_{(III)S}\phi\rho\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{S}$$

$$=\oint_S\phi\rho\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{S}$$

于是

$$\frac{D}{Dt}\int_V\phi\rho dV=\frac{\partial}{\partial t}\int_V\phi\rho\, dV+\oint_S\phi\rho\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{S} \tag{2-72}$$

上式即为雷诺输运方程。应用这一方程及质量守恒、动量守恒、能量守恒诸定律，可分别求得流体力学诸基本方程如下：

2．连续方程的积分形式

如令 $\phi=1$，则

$$\Phi=\int_V\rho\, dV$$

表示控制体 V 内的流体质量，由质量守恒定律得

$$\frac{D}{Dt}\int_V\rho\, dV=\frac{\partial}{\partial t}\int_V\rho\, dV+\oint_S\rho\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{S}=0$$

由式(2-46)，可得

$$\oint_S\rho\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{S}=\oint_S\rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\, dS=\int_V\mathrm{div}\,\rho\boldsymbol{v}dV$$

于是
$$\frac{D}{Dt}\int_V\rho\, dV=\int_V\frac{\partial\rho}{\partial t}dV+\int_V\mathrm{div}\,\rho\boldsymbol{v}dV=0$$

或

$$\int_V\left[\frac{\partial\rho}{\partial t}+\mathrm{div}(\rho\boldsymbol{v})\right]dV=0 \tag{2-73}$$

上式对任何体积 V 均成立，因而，可得微分形式的连续方程

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\mathrm{div}(\rho\boldsymbol{v})=0$$

由以上讨论可得另一重要关系式

$$\begin{aligned}\frac{D}{Dt}\int_V\phi\rho\,dV&=\int_V\left[\frac{\partial(\phi\rho)}{\partial t}+\mathrm{div}(\phi\rho\boldsymbol{v})\right]dV\\&=\int_V\left\{\phi\left[\frac{\partial\rho}{\partial t}+\mathrm{div}(\rho\boldsymbol{v})\right]+\rho\left[\frac{\partial\phi}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{grad}\,\phi\right]\right\}dV\\&=\int_V\rho\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{grad}\,\phi\right)dV\end{aligned}$$

已知
$$\frac{\partial\phi}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{grad}\,\phi=\frac{D\phi}{Dt}$$

所以

$$\frac{D}{Dt}\int_V\phi\rho\,dV=\int\frac{D\phi}{Dt}\rho\,dV \qquad (2\text{-}74)$$

3. 运动方程的积分形式

由牛顿第二运动定律可得，作用在控制体外力的合力等于控制体内系统的动量变化率，即

$$\frac{D}{Dt}\int_V\rho\boldsymbol{v}\,dV=\int_V\rho\boldsymbol{f}\,dV+\oint_S\boldsymbol{p}_n\,dS$$

因
$$\frac{D}{Dt}\int_V\rho\boldsymbol{v}\,dV=\int_V\rho\frac{D\boldsymbol{v}}{Dt}dV,\quad \boldsymbol{p}_n=\boldsymbol{n}\cdot P$$

故

$$\int_V\rho\frac{D\boldsymbol{v}}{Dt}dV=\int_V\rho\boldsymbol{f}\,dV+\oint_S(\boldsymbol{n}\cdot P)\,dS \qquad (2\text{-}75)$$

式中 $\boldsymbol{f}$ 为作用于系统的单位质量的质量力。而 $\boldsymbol{p}_n$ 为作用于外法线为 $\boldsymbol{n}$ 之微元控制面 dS 的应力，如写成分量形式，则得

$$\frac{D}{Dt}\int_V\rho v_i\,dV=\int_V\rho f_i\,dV+\oint_S p_{ij}\alpha_{nj}\,dS$$

由式(2-48)，得

或

$$\left.\begin{aligned}&\frac{D}{Dt}\int_V \rho v_i dV=\int_V \rho f_i dV+\int_V P_{ij,i} dV\\&\int\left[\rho\frac{DV_j}{Dt}-\rho f_j-\frac{\rho P_{ij}}{\partial x_i}\right]dV=0\end{aligned}\right\}\tag{2-76}$$

$$\frac{\partial p_{ij}}{\partial x_i}+\rho f_j=\rho a_j$$

4．能量方程的积分形式

能量方程可由运动方程直接与速度 $\boldsymbol{v}$ 作数性积求得

$$\int_V \rho\frac{D\boldsymbol{v}}{Dt}\cdot\boldsymbol{v}dV=\int_V \rho\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}\,dV+\oint_S(\boldsymbol{n}\cdot p\boldsymbol{v})dS$$

由于

$$\frac{D\boldsymbol{v}}{Dt}\cdot\boldsymbol{v}=\frac{D}{Dt}\left(\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}}{2}\right)=\frac{D}{Dt}\left(\frac{v^2}{2}\right)$$

$$\oint_S(\boldsymbol{n}\cdot P\cdot\boldsymbol{v})dS=\oint_V\nabla\cdot(P\cdot\boldsymbol{v})dV$$

所以

$$\int_V \rho\frac{D}{Dt}\left(\frac{v^2}{2}\right)dV=\frac{D}{Dt}\int_V \rho\frac{v^2}{2}dV$$

$$=\int_V[\rho\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}+\nabla\cdot(P\cdot\boldsymbol{v})]dV\tag{2-77}$$

习　　题

2-1 试应用张量知识，证明

(a) $\nabla\boldsymbol{r}_P=I$　　　　(b) $\nabla\cdot\boldsymbol{r}_P=3$

(c) $\nabla\times\boldsymbol{r}_P=0$

2-2 应用以上结果，如设 $\boldsymbol{\omega}=\text{const}$, $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_P$, 则

$$\text{rot}\ \boldsymbol{v}=2\boldsymbol{\omega}$$

2-3 试证转动惯量 J 又可写成

$$J=m[|\boldsymbol{r}_P|^2I-\boldsymbol{r}_P\boldsymbol{r}_P]$$

2-4 试应用 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_P$ 直接证明

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{r}_P\cdot\boldsymbol{\Omega}$$

第三章　斜交曲线坐标系与张量分析

第二章着重讨论了笛卡尔坐标系下的张量——二阶仿射正交张量。显然，这种张量只适用于笛卡尔坐标系，因而有很大的局限性，即使对于常用的柱坐标或球坐标，第二章有关张量的讨论都应作修正。

笛卡尔坐标系的主要特点在于，如在空间任取一点，从该点沿坐标增加方向取单位矢量，则这些单位矢量的方向不随空间位置变化。如图 3-1(a)所示，以平面笛卡尔坐标系为例，P、Q 两点的单位矢量的方向不变，至于其他坐标系则不同，即使选用较简单的极坐标系，其单位矢量的方向也将随空间位置而变，如图 3-1(b)所示，如果同取 P、Q 两点，其单位矢量的方向均不相同。

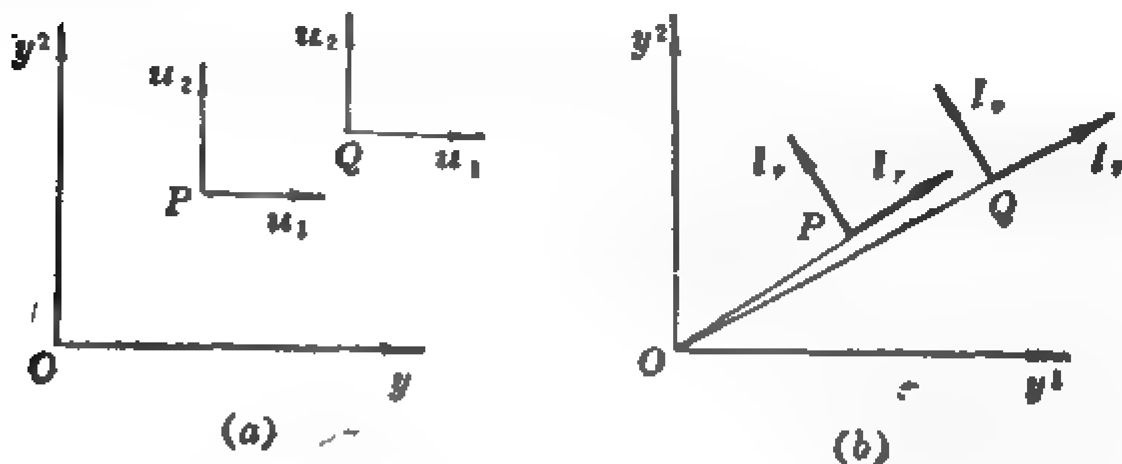


图 3-1

坐标单位矢量随位置而变增加了问题的复杂性，因为在这种情况下，单位矢量对坐标的偏导数将不为零。

本章要讨论的正是这一类问题，而所用的坐标系则是最普遍

的所谓斜交曲线坐标系。

第一节　斜交曲线坐标系的一般概念

任何一个新概念的引入常常是以老概念为基础的。笛卡尔坐标系虽然简单，但仍要加以利用，为此，下面先回顾一下笛卡尔坐标系的有关知识。

在三维空间中，通常以三个实数组确定空间的位置，这三个实数组称空间点的坐标。

最简单的三个实数组是空间内一点到三个互成正交平面的垂直距离，以这三个垂直距离为坐标的坐标系就是笛卡尔坐标系，用 y^i 表示，而笛卡尔坐标系的单位矢量则用 u_i 表示。

如果 $P(C_1, C_2, C_3)$ 是空间某一确定的点，则

$$y^1=C_1、y^2=C_2、y^3=C_3$$

分别表示三个过 P 点的互成正交的平面。当沿任一平面移动时，有一个坐标保持常数，而其他两个坐标则变化，这三个平面称过 P 点的坐标平面（图 3-2）。

三个平面相交可得三条交线，它们分别平行于坐标轴，当沿交线移动时，只有一个坐标变化，其他两个坐标保持不变，这三个交线称坐标曲线。对于笛卡尔坐标系的特殊情况，它们是三条直线，三条直线的交点就是 P 点。

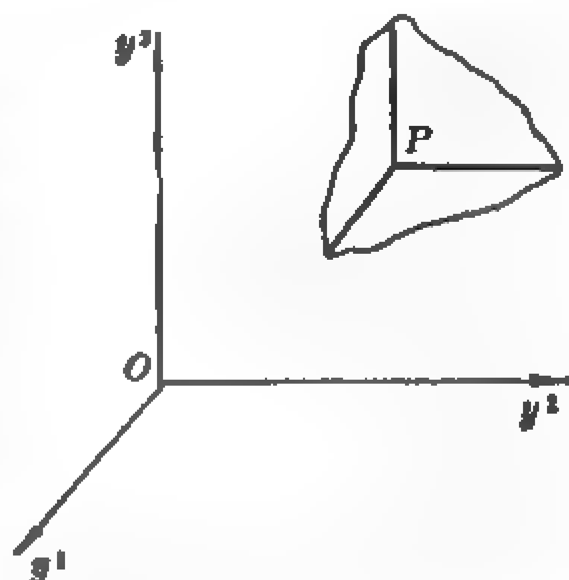


图 3-2

如过 P 点沿坐标增加方向取单位矢量，则称此单位矢量为过点 P 的坐标单位矢量，这样，

三个单位矢量形成一局部标架。

为了加深对坐标系的理解，现再以柱坐标和球坐标为例。如图3-3所示，由柱坐标 r、φ、z 所确定的空间一点 P (C_1', C_2', C_3')，同样也可通过 P 点作

$$r=C_1'、\varphi=C_2'、z=C_3'$$

三个面（不一定是平面），由于 $r=\sqrt{x^2+y^2}$，

$$\varphi=\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x},\ z=z$$

所以

$r=C_1'$ 对应于柱面

$$x^2+y^2=(C_1')^2$$

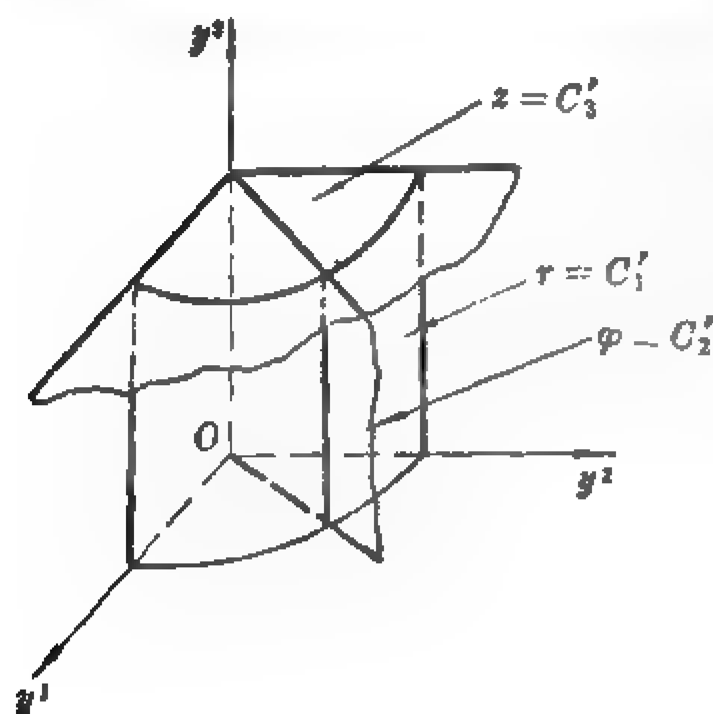


图 3-3

$$\varphi=\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}=C_2' \quad \text{对应于半平面}$$

$$z=C_3' \quad \text{则对应于和} Oy^1y^2 \text{平行的平面}$$

和笛卡尔坐标系类似，$r=C_1'$、$\varphi=C_2'$、$z=C_3'$ 分别代表三个面，但它们不再都是平面，其中 $r=C_1'$ 为圆柱面，三个面的交线也不再都是直线，其中 $r=C_1'$、$z=C_3'$ 的交线是一个圆。

至于球坐标(R, θ, φ)的情况，可由图3-4看到，

$R=C_1''$、$\theta=C_2''$、$\varphi=C_3''$ 分别代表球面、锥面和半平面。其中 $R=C_1''$ 和 $\varphi=C_3''$ 的交线为圆心位于原点的大圆；$\theta=C_2''$ 和 $\varphi=C_3''$ 的交线为一直线；而 $R=C_1''$ 与 $\theta=C_2''$ 的交线则是平行于 Oy_1y_2 坐标面的圆周。

对于以上两种坐标系，其坐标曲线不一定是直线，但是，如过 P 点分别作坐标曲线的切线，则可看到，这些切线是互成正交的，

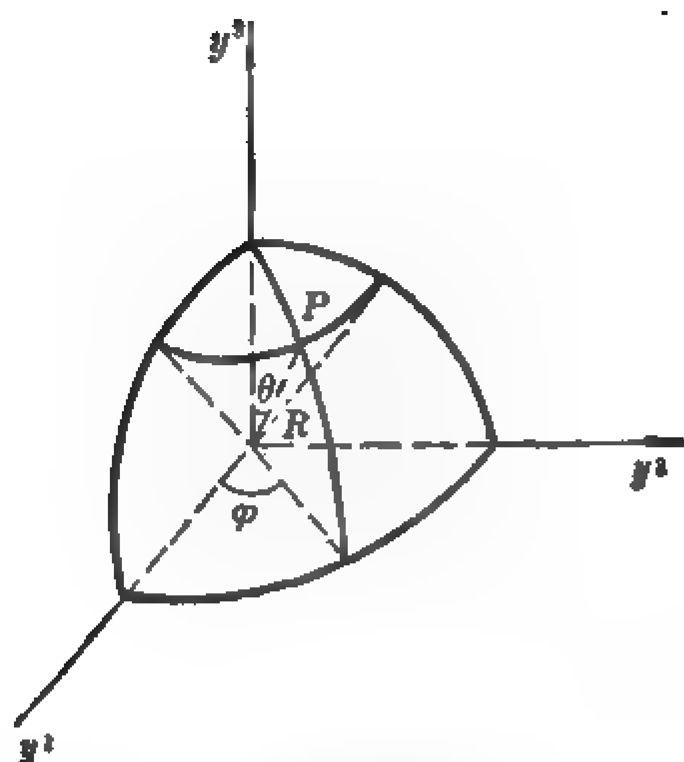


图 3-4

所以，这种坐标系又称为正交曲线坐标系。

除此以外，对上面的三种坐标系而言，空间一点 P 的位置矢量 $\boldsymbol{r}_P$ 均可写成分解式如下：

笛卡尔坐标系

$$\boldsymbol{r}_p=y^i\boldsymbol{u}_i$$

柱坐标系

$$\boldsymbol{r}_p=x^1\boldsymbol{l}_1+x^3\boldsymbol{l}_3{}^{(1)}$$

式中 $x^1=r,\ x^3=z,\ \boldsymbol{l}_1=\boldsymbol{l}_r,\ \boldsymbol{l}_3=\boldsymbol{l}_z=\boldsymbol{u}_3$

球坐标系

$$\boldsymbol{r}_p=x^1\boldsymbol{l}_1$$

式中 $x^1=R,\ \boldsymbol{l}_1=\boldsymbol{l}_R$

这一结果表明，对于这类正交曲线坐标系，其位置矢量 $\boldsymbol{r}_P$ 仍可写出其分解式。

其实，如果另取三个数组 x^i 来确定空间位置，则只要知道三个

(1) 以后统一规定，曲线坐标采用 x^1、x^2、x^3。

数组和 y^i 间的函数关系并保证函数处处单值连续可导且反函数存在，即

$$x^i=x^i(y^1,\ y^2,\ y^3),\quad y^i=y^i(x^1,\ x^2,\ x^3)$$

则称 x^i 为任意的曲线坐标，而由 x^i 构成的坐标系为任意的曲线坐标系。对于这种任意的曲线坐标系的讨论，现仍沿用上面的程序。

由于 x^i 是 y^1、y^2、y^3 的函数，所以，x^i 可看成是笛卡尔坐标系下的某一标量函数，当令

$$x^i=x^i(y^1,\ y^2,\ y^3)=c^i$$

时，对于笛卡尔坐标而言，上式表示了标量函数 x^i 的等值面，即在这一等值面上，x^i 为常值。

例如，对于球坐标，当令

$$R^2=(y^1)^2+(y^2)^2+(y^3)^2=\mathrm{const}$$

时，可得一球心为原点的球面。

于是，当 $i=1,\ 2,\ 3$ 时，将得到过 $P(c^1,\ c^2,\ c^3)$ 点的三个曲面；这三个曲面被称为坐标曲面。三个曲面相交可得三条曲线，这三条曲线被称为坐标曲线。

当沿 $x^1=c^1$、$x^2=c^2$ 交成的坐标曲线移动时，只有 x^3 变化，x^1、x^2 为常数。为了便于讨论，则称此坐标曲线为 x^3 坐标曲线，而其他两条分别称为 x^1、x^2 坐标曲线。

在一般情况下，如采用任意曲线坐标，则不可能将位置矢量 $\boldsymbol{r}_P$ 写成明显的分解式。

过 P 点作坐标曲线的切线并取单位矢量，则由于坐标曲线的任意性，它们将不互成正交，这样，在 P 点形成一斜交的局部标架。不仅如此，也由于坐标曲线的任意性，当在空间另取一点 Q，然后过 Q 点取一局部标架，则这两个局部标架的方向将不相同，即在斜交的曲线坐标下，当从空间一点迁移到另一点时，局部标架

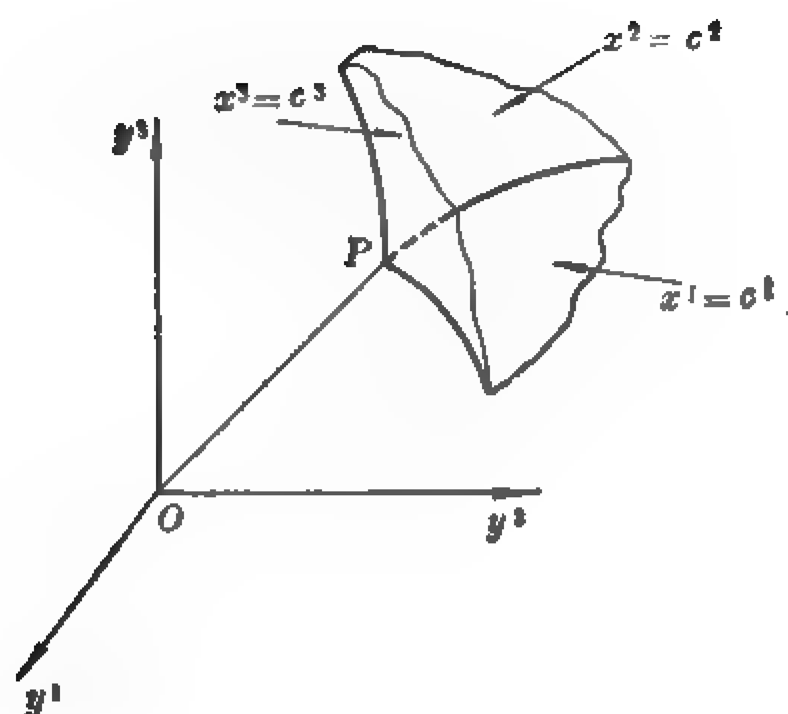


图 3-5

方向也是改变的。

对比笛卡尔坐标系和任意曲线坐标系,即发现:

(一) 前者坐标单位矢量方向不变,后者则改变;

(二) 前者坐标曲线为直线且互成正交,后者为曲线且互为斜交

根据以上两点,坐标系的特点可用坐标曲线的曲率 K 和坐标单位矢量的夹角 $\cos\theta_{ij}=\boldsymbol{l}_i\cdot\boldsymbol{l}_j$ 来表示。据此,可将坐标系分成下列四类:

(一) $K=0$、$\theta_{ij}=\pi/2$。这种坐标系称正交笛卡尔坐标系

(二) $K=0$, $\theta_{ij}\neq\pi/2$,称斜交笛卡尔坐标系[1]

(三) $K\neq0$, $\theta_{ij}=\pi/2$,称正交曲线坐标系

(四) $K\neq0$, $\theta_{ij}\neq\pi/2$,称斜交曲线坐标系

显然,斜交曲线坐标系是一种最为一般的坐标系。

---

[1] 斜交笛卡尔坐标系的坐标曲线为直线,但夹角不等于 $\pi/2$,单位矢量仍为常矢量。

第二节　斜交曲线坐标系的坐标基本矢量$\boldsymbol{e}_i$和倒易基本矢量$\boldsymbol{e}^i$

上一节已经论及，对于笛卡尔坐标系、柱坐标系以及球坐标系，空间一点 P 的位置矢量可分别用下列各式表示

$$\left.\begin{array}{l}\boldsymbol{r}_P=y^i\boldsymbol{u}_i(y^1=x,\ y^2=y,\ y^3=z),\\ \boldsymbol{r}_P=x^1\boldsymbol{u}_1+x^3\boldsymbol{u}_3(x^1=r,\ x^3=z,\ \boldsymbol{u}_1=\boldsymbol{u}_r,\ \boldsymbol{u}_3=\boldsymbol{u}_z)\\ \boldsymbol{r}_P=x^1\boldsymbol{u}_1(x^1=R,\ \boldsymbol{u}_1=\boldsymbol{u}_R)\end{array}\right\}\quad(3\text{-}1)$$

至于斜交曲线坐标系，虽然不能用一显式表示位置矢量，但总可以认为 $\boldsymbol{r}_P$ 是 x^i 的函数，即

$$\boldsymbol{r}_P=\boldsymbol{r}_P(x^i)$$

除此以外，如果再仔细分析，即使是在斜交曲线坐标系下，当沿 x^1 坐标曲线移动时，x^2、x^3 不变，只有 x^1 有变化(余类推)；与此相反，当沿 x^1 坐标曲线移动时，笛卡尔坐标 y^i 将同时变化。现利用这一点对曲线坐标系作些讨论。

设在 P 点邻域沿 x^1、x^2、x^3 三条坐标曲线分别取 P_1、P_2、P_3，则必有

$$P_1(x^1+dx^1,\ x^2,\ x^3);\ P_2(x^1,\ x^2+dx^2,\ x^3)$$
$$P_3(x^1,\ x^2,\ x^3+dx^3)$$

此处 dx^i 为 x^i 的微分。

当 P_1、P_2、P_3 向 P 无限接近，并分别令

$$d\boldsymbol{S}=\boldsymbol{PP}_1,\ d\boldsymbol{S}_2=\boldsymbol{PP}_2,\ d\boldsymbol{S}_3=\boldsymbol{PP}_3$$

由于笛卡尔坐标系的局部标架，其三个方向不随空间位置改变，因而可写出分解式

$$d\boldsymbol{S}_1=(d\boldsymbol{r}_P)_1=[d(y^i\boldsymbol{u}_i)]_1$$

或
$$d\boldsymbol{S}_1=(dy^1)_1\boldsymbol{u}_1+(dy^2)_1\boldsymbol{u}_2+(dy^3)_1\boldsymbol{u}_3\qquad(3\text{-}2)$$

注意：式中的下标"1"表示是沿 x^1 坐标曲线取的，它们表示 $\boldsymbol{PP}_1$ 方向对 y^1、y^2、y^3 的微分。

因
$$y^i=y^i(x^1,\ x^2,\ x^3)$$

所以
$$(dy^i)_1=\frac{\partial y^i}{\partial x^j}dx^j \tag{3-3}$$

值得注意的是，点 P_1 取在 x^1 坐标曲线上，除 $dx^1\neq 0$ 以外，$dx^2=dx^3=0$，则式(3-3)可改写成

$$(dy^i)_1=\frac{\partial y^i}{\partial x^1}dx^1$$

或
$$(dy^1)_1=\frac{\partial y^1}{\partial x^1}dx^1,\quad (dy^2)_1=\frac{\partial y^2}{\partial x^1}dx^1,$$

$$(dy^3)_1=\frac{\partial y^3}{\partial x^1}dx^1$$

将以上结果代入式(3-2)，即得

$$\boldsymbol{PP}_1=d\boldsymbol{S}_1=\left(\frac{\partial y^1}{\partial x^1}\boldsymbol{u}_1+\frac{\partial y^2}{\partial x^1}\boldsymbol{u}_2+\frac{\partial y^3}{\partial x^1}\boldsymbol{u}_3\right)dx^1 \tag{3-4}$$

同理可得

$$\boldsymbol{PP}_2=d\boldsymbol{S}_2=\left(\frac{\partial y^1}{\partial x^2}\boldsymbol{u}_1+\frac{\partial y^2}{\partial x^2}\boldsymbol{u}_2+\frac{\partial y^3}{\partial x^2}\boldsymbol{u}_3\right)dx^2$$

$$\boldsymbol{PP}_3=d\boldsymbol{S}_3=\left(\frac{\partial y^1}{\partial x^3}\boldsymbol{u}_1+\frac{\partial y^2}{\partial x^3}\boldsymbol{u}_2+\frac{\partial y^3}{\partial x^3}\boldsymbol{u}_3\right)dx^3$$

又由于 $\boldsymbol{u}_1$、$\boldsymbol{u}_2$、$\boldsymbol{u}_3$ 的方向始终不变，所以

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}_1}{\partial x^1}=\frac{\partial \boldsymbol{u}_2}{\partial x^1}=\frac{\partial \boldsymbol{u}_3}{\partial x^1}=0$$

于是

$$\frac{\partial y^1}{\partial x^1}\boldsymbol{u}_1+\frac{\partial y^2}{\partial x^1}\boldsymbol{u}_2+\frac{\partial y^3}{\partial x^1}\boldsymbol{u}_3$$

$$=\frac{\partial}{\partial x^1}(y^1\boldsymbol{u}^1{}_1+y^2\boldsymbol{u}_2+y^3\boldsymbol{u}_3)=\frac{\partial \boldsymbol{r}_P}{\partial x^1}$$

代入式(3-4)，可得

同理
$$\left.\begin{aligned} dS_1&=\frac{\partial \boldsymbol{r}_P}{\partial x^1}dx^1\\ dS_2&=\frac{\partial \boldsymbol{r}_P}{\partial x^2}dx^2\\ dS_3&=\frac{\partial \boldsymbol{r}_P}{\partial x^3}dx^3\end{aligned}\right\} \tag{3-5}$$

或归纳为

$$dS_i=\frac{\partial \boldsymbol{r}_P}{\partial x^i}dx^i \quad （不对 i 求和） \tag{3-5'}$$

令式(3-5)′中的 $\frac{\partial \boldsymbol{r}_P}{\partial x^i}$ 为第 i 个坐标基本矢量，则

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{e}_i&=\frac{\partial \boldsymbol{r}_P}{\partial x^i}=\frac{\partial y^1}{\partial x^i}\boldsymbol{u}_1+\frac{\partial y^2}{\partial x^i}\boldsymbol{u}_2+\frac{\partial y^3}{\partial x^i}\boldsymbol{u}_3\\ 或\quad \boldsymbol{e}_i&=\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\boldsymbol{u}_j\end{aligned}\right\} \tag{3-6}$$

在引进坐标基本矢量之后，dS_1、dS_2、dS_3 可表示成

$$dS_1=\boldsymbol{e}_1dx^1、dS_2=\boldsymbol{e}_2dx^2、dS_3=\boldsymbol{e}_3dx^3 \tag{3-6'}$$

利用以上结果，可把空间一点 P 至邻近一点 P' 的微元位置矢量 $d\boldsymbol{r}_P$ 写成

$$d\boldsymbol{r}_P=d\boldsymbol{S}=dS_1+dS_2+dS_3=\boldsymbol{e}_idx^i \tag{3-7}$$ [1]

式(3-7)表明，dx^i 是 $d\boldsymbol{r}_P$ 的逆变分量。

由式(3-6)可看出，

$$e_{ij}=(\boldsymbol{e}_i)_j=\frac{\partial y^j}{\partial x^i}$$

是 $\boldsymbol{e}_i$ 的第 j 个分量。

以上讨论了斜交曲线坐标系下的基本矢量。根据基本矢量的表达式，只要知道笛卡尔坐标 y^i 和斜交曲线坐标 x^i 之间的函数关

---

(1) 这一结果可直接求得如下：

由 $\boldsymbol{r}_P=\boldsymbol{r}_P(x^i)$，可得

$$d\boldsymbol{r}_P=\frac{\partial \boldsymbol{r}_P}{\partial x^i}dx^i=\boldsymbol{e}_idx^i$$

系，同时一阶偏导数存在，则必能找到坐标基本矢量。

作为特殊情况，如令 $x^i=y^i$，则

$$\boldsymbol{e}_i=\boldsymbol{u}_i$$

即对于笛卡尔坐标系，基本矢量就是笛卡尔坐标系的单位矢量。

在引进坐标基本矢量 $\boldsymbol{e}_i$ 的同时，再引进倒易基本矢量 $\boldsymbol{e}^i$。

根据 x^i 与 y^i 间的函数关系，并应用多元函数求偏导数的链法则，应有

$$\begin{aligned}\frac{\partial x^i}{\partial x^j}&=\frac{\partial x^i}{\partial y^1}\frac{\partial y^1}{\partial x^j}+\frac{\partial x^i}{\partial y^2}\frac{\partial y^2}{\partial x^j}+\frac{\partial x^i}{\partial y^3}\frac{\partial y^3}{\partial x^j}\\&=\frac{\partial x^i}{\partial y^k}\frac{\partial y^k}{\partial x^j}\end{aligned}$$

因为 x^i 是相互独立的数组，它们之间不存在函数关系，所以

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^j}=\begin{cases}1(i=j)\\0(i\neq j)\end{cases}$$

或
$$\frac{\partial x^i}{\partial x^j}=\delta^i_j$$

将这一结果代入上式，即得

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^j}=\frac{\partial x^i}{\partial y^k}\frac{\partial y^k}{\partial x^j}=\delta_j^i \tag{3-8}$$

式中 $\frac{\partial y^k}{\partial x^j}$ 是 $\boldsymbol{e}_j$ 的第 k 个分量，由于 $x^i=x^i(y^1, y^2, y^3)$，可将 $\frac{\partial x^i}{\partial y^k}$ 看成是 y^i 的标量函数。根据标量函数的梯度定义，$\frac{\partial x^i}{\partial y^k}$ 是 ∇x^i 的第 k 个分量。于是式(3-8)可改写成

$$\nabla x^i\cdot\boldsymbol{e}_j=\delta_j^i \tag{3-9}$$

由式(1-22)，立即可得

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{e}^i=\nabla x^i=\frac{\partial x^i}{\partial y^1}\boldsymbol{u}_1+\frac{\partial x^i}{\partial y^2}\boldsymbol{u}_2+\frac{\partial x^i}{\partial y^3}\boldsymbol{u}_3\\ \text{或}\quad&\boldsymbol{e}^i=\frac{\partial x^i}{\partial y^j}\boldsymbol{u}_j,\quad e^{ij}=\frac{\partial x^i}{\partial y^j}\end{aligned}\right\} \tag{3-10}$$

式中 $e^{ij}=\frac{\partial x^i}{\partial y^j}$ 为倒易基本矢量 e^i 的第 j 个分量。从式(3-10)还可看到，只要知道 x^i 和 y^i 间的函数关系，空间一点的坐标倒易基本矢量亦可求得。

既然在空间每点均可求得基本矢量 e_i 和倒易基本矢量 e^i，因此就在空间形成两种局部标架——基本矢量 e_i 标架和倒易基本矢量 e^i 标架(图3-6)。不难理解，在斜交曲线坐标系下，克罗尼柯尔记号可由

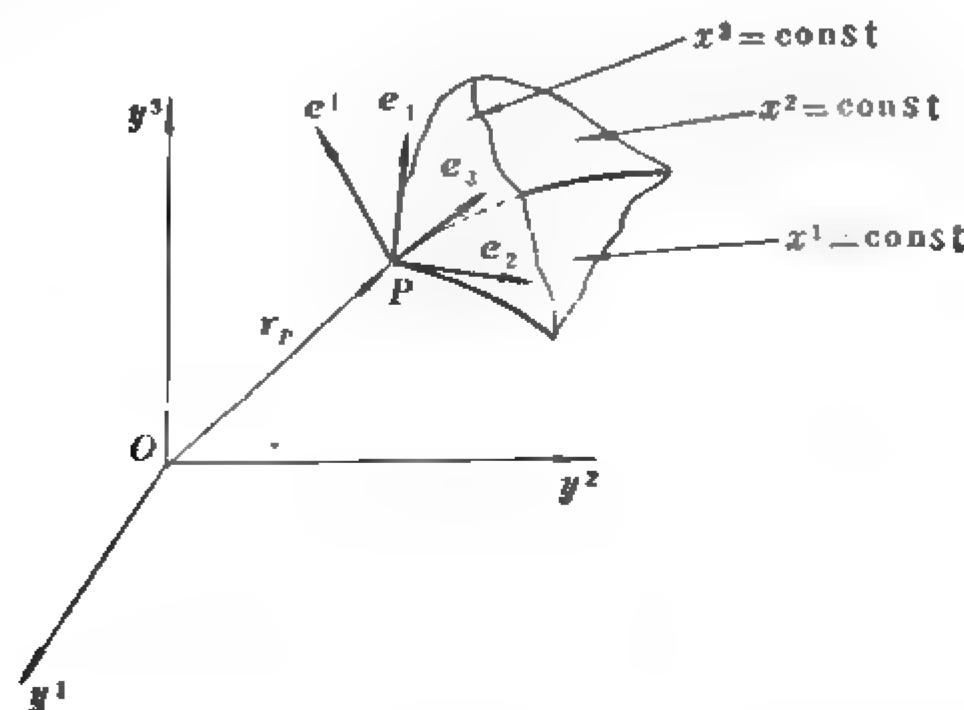


图 3-6

$$e_i \cdot e^j = \delta_i^j$$

来定义。

对于斜交曲线坐标系下的坐标基本矢量 e_i 和倒易基本矢量 e^i，就其性质而言，可归纳为如下几点：

1. 由 e^i 和 e_i 的定义式以及斜交曲线坐标 x^i 的任意性（可以是长度因次，也可以是无因次量），即使是同一曲线坐标系，其 e_i 及 e^i 的因次不尽相同。例如，对于柱坐标有

$$
\left.\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{e}_r=\frac{\partial x}{\partial r}\boldsymbol{u}_1+\frac{\partial y}{\partial r}\boldsymbol{u}_2+\frac{\partial z}{\partial r}\boldsymbol{u}_3=\cos\varphi\,\boldsymbol{u}_1+\sin\varphi\,\boldsymbol{u}_2\\
\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{e}_\varphi=\frac{\partial x}{\partial \varphi}\boldsymbol{u}_1+\frac{\partial y}{\partial \varphi}\boldsymbol{u}_2+\frac{\partial z}{\partial \varphi}\boldsymbol{u}_3=r(-\sin\varphi\,\boldsymbol{u}_1+\cos\varphi\,\boldsymbol{u}_2)\\
\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{e}_z=\frac{\partial x}{\partial z}\boldsymbol{u}_1+\frac{\partial y}{\partial z}\boldsymbol{u}_2+\frac{\partial z}{\partial z}\boldsymbol{u}_3=\boldsymbol{u}_3
\end{aligned}\right\}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
\boldsymbol{e}^1=\boldsymbol{e}^r=\frac{\partial r}{\partial x}\boldsymbol{u}_1+\frac{\partial r}{\partial y}\boldsymbol{u}_2+\frac{\partial r}{\partial z}\boldsymbol{u}_3=\cos\varphi\,\boldsymbol{u}_1+\sin\varphi\,\boldsymbol{u}_2\\
\boldsymbol{e}^2=\boldsymbol{e}^\varphi=\frac{\partial \varphi}{\partial x}\boldsymbol{u}_1+\frac{\partial \varphi}{\partial y}\boldsymbol{u}_2+\frac{\partial \varphi}{\partial z}\boldsymbol{u}_3=\frac{1}{r}(-\sin\varphi\,\boldsymbol{u}_1+\cos\varphi\,\boldsymbol{u}_2)\\
\boldsymbol{e}^3=\boldsymbol{e}^z=\frac{\partial z}{\partial x}\boldsymbol{u}_1+\frac{\partial z}{\partial y}\boldsymbol{u}_2+\frac{\partial z}{\partial z}\boldsymbol{u}_3=\boldsymbol{u}_3
\end{aligned}\right\}
$$

由以上结果可以看出，$\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_3$ 及 $\boldsymbol{e}^1$、$\boldsymbol{e}^3$ 为无因次，而 $\boldsymbol{e}_2$、$\boldsymbol{e}^2$ 则是有因次的。

对于球坐标，则可求得基本矢量和倒易基本矢量如下：

$$
\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{e}_R=\frac{\partial x}{\partial R}\boldsymbol{u}_1+\frac{\partial y}{\partial R}\boldsymbol{u}_2+\frac{\partial z}{\partial R}\boldsymbol{u}_3
$$

$$
\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{e}_\theta=\frac{\partial x}{\partial \theta}\boldsymbol{u}_1+\frac{\partial y}{\partial \theta}\boldsymbol{u}_2+\frac{\partial z}{\partial \varphi}\boldsymbol{u}_3
$$

$$
\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{e}_\varphi=\frac{\partial x}{\partial \varphi}\boldsymbol{u}_1+\frac{\partial y}{\partial \varphi}\boldsymbol{u}_2+\frac{\partial z}{\partial \varphi}\boldsymbol{u}_3
$$

或

$$
\left.\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_R=\sin\theta\cos\varphi\,\boldsymbol{u}_1+\sin\theta\sin\varphi\,\boldsymbol{u}_2+\cos\theta\,\boldsymbol{u}_3\\
\boldsymbol{e}_\theta=R\cos\theta\cos\varphi\,\boldsymbol{u}_1+R\cos\theta\sin\varphi\,\boldsymbol{u}_2-R\sin\theta\,\boldsymbol{u}_3\\
\boldsymbol{e}_\varphi=-R\sin\theta\sin\varphi\,\boldsymbol{u}_1+R\sin\theta\cos\varphi\,\boldsymbol{u}_2
\end{aligned}\right\}
$$

其倒易基本矢量则为

$$
\boldsymbol{e}^R=\sin\theta\cos\varphi\boldsymbol{u}_1+\sin\theta\sin\varphi\boldsymbol{u}_2+\cos\theta\boldsymbol{u}_3
$$

$$
\boldsymbol{e}^\theta=\frac{1}{R}(\cos\theta\cos\varphi\,\boldsymbol{u}_1+\cos\theta\sin\varphi\,\boldsymbol{u}_2-\sin\theta\,\boldsymbol{u}_3)
$$

$$
\boldsymbol{e}^\varphi=\frac{1}{R\sin\theta}(-\sin\varphi\,\boldsymbol{u}_1+\cos\varphi\,\boldsymbol{u}_2)
$$

对于球坐标，除 e_R、e^R 外均有因次。

以上两例均表明，正交曲线坐标系下，对应的矢量的方向相同，其模互为倒数。

2．如果是笛卡尔坐标系，则 $e^i = e_i = u_i$。

3．由于 e^i 垂直于坐标曲面 $x^i = \text{const}$， 当 $i \neq j$ 时，$e^i \cdot e_j = 0$，因此，$e_j (i \neq j)$ 必与 x^i 坐标曲面($x^i = \text{const}$)相切。

4．表达式 $e^i \cdot e_j = \delta_j^i$ 代表了九个关系式，这九个关系式可由下列两行列式相乘来表示，即

$$
\begin{vmatrix}
\frac{\partial x^1}{\partial y^1} & \frac{\partial x^1}{\partial y^2} & \frac{\partial x^1}{\partial y^3} \\
\frac{\partial x^2}{\partial y^1} & \frac{\partial x^2}{\partial y^2} & \frac{\partial x^2}{\partial y^3} \\
\frac{\partial x^3}{\partial y^1} & \frac{\partial x^3}{\partial y^2} & \frac{\partial x^3}{\partial y^3}
\end{vmatrix}
\begin{vmatrix}
\frac{\partial y^1}{\partial x^1} & \frac{\partial y^1}{\partial x^2} & \frac{\partial y^1}{\partial x^3} \\
\frac{\partial y^2}{\partial x^1} & \frac{\partial y^2}{\partial x^2} & \frac{\partial y^2}{\partial x^3} \\
\frac{\partial y^3}{\partial x^1} & \frac{\partial y^3}{\partial x^2} & \frac{\partial y^3}{\partial x^3}
\end{vmatrix}
=
\begin{vmatrix}
1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1
\end{vmatrix}
\tag{3-11}
$$

第一个行列式还可改写成

$$
\begin{vmatrix}
e^{11} & e^{12} & e^{13} \\
e^{21} & e^{22} & e^{23} \\
e^{31} & e^{32} & e^{33}
\end{vmatrix}
= e^1 \cdot (e^2 \times e^3) = V'
$$

第二个行列式经置换后也可表示成

$$
\begin{vmatrix}
e_{11} & e_{12} & e_{13} \\
e_{21} & e_{22} & e_{23} \\
e_{31} & e_{32} & e_{33}
\end{vmatrix}
= e_1 \cdot (e_2 \times e_3) = V
$$

因而，从式(3-11)可得

$$
V'V = 1
$$

这一结果和第一章所介绍的结论一致。

5. 斜交曲线坐标系下的 $e_i\cdot(e_j\times e_k)$、$e^i(e^j\times e^k)$

令
$$\epsilon_{ijk}=e_i\cdot(e_j\times e_k);\ \epsilon^{ijk}=e^i\cdot(e^j\times e^k)$$

则
$$\epsilon_{ijk}=\sqrt{g}\,s_{ijk};\ \epsilon^{ijk}=\frac{1}{\sqrt{g}}s^{ijk}$$

也即斜交曲线坐标下，ϵ_{ijk}、ϵ^{ijk} 代替了 s_{ijk}、s^{ijk}。

第三节　斜交曲线坐标系的诸要素

在力学研究中，不仅要求确定空间一点的坐标，还要求确定邻近两点间微元位置矢量、沿坐标曲线微元位置矢量构成的面积及体积，不仅如此，还应确定两坐标曲线的夹角 θ_{ij}。所有这些统称为斜交曲线坐标的要素。

（一）微元位置矢量和度量张量

如图 3-7 所示，过 P 点作 e_1、e_2、e_3，并在 P 点邻近取一点 Q，若设 P 点位置矢量为 $\boldsymbol{r}_P$，Q 点位置矢量为 $\boldsymbol{r}_P+d\boldsymbol{r}_P$，于是微元位置矢量

$$\boldsymbol{PQ}=d\boldsymbol{r}_P$$

显然，$d\boldsymbol{r}_P$ 可向 e_i 方向分解，也可向 e^i 方向分解，即 $d\boldsymbol{r}_P$ 可分别写成

$$\left.\begin{aligned} &d\boldsymbol{r}_P=e_i dx^i=e_j dx^j\\ \text{及}\quad &d\boldsymbol{r}_P=e^i dx_i=e^j dx_j \end{aligned}\right\} \tag{3-12}$$

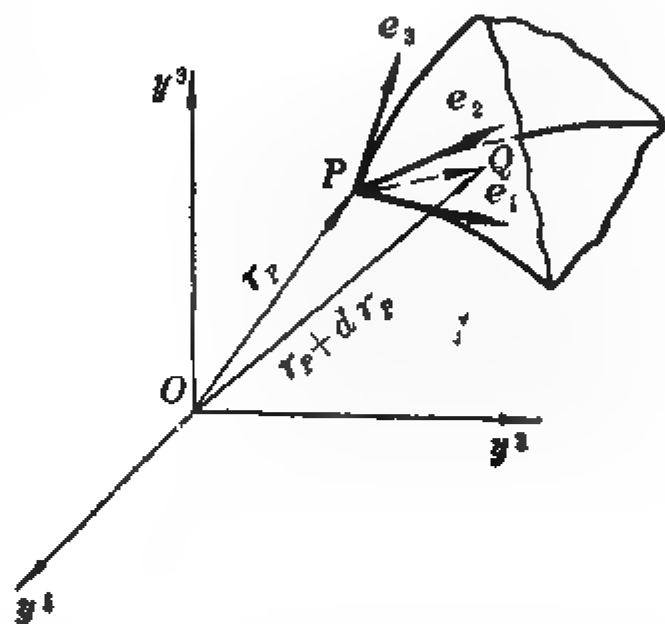


图 3-7

由于 $d\boldsymbol{r}_P$ 向斜交方向分解，因而和笛卡尔坐标系不同，$|d\boldsymbol{r}_P|$ 不等于各分量的平方和。但是，由矢量之数性积的性质，则有

$$|d\boldsymbol{r}_P|^2=d\boldsymbol{r}_P\cdot d\boldsymbol{r}_P$$

如令$|d\boldsymbol{r}_P|=ds$，则

$$(ds)^2=d\boldsymbol{r}_P\cdot d\boldsymbol{r}_P$$

应用式(8-12)于是得

$$(ds)^2=\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j dx^i dx^j \tag{8-13}$$

将式(8-13)展开，得

$$\begin{aligned}(ds)^2&=\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_1 dx^i dx^1+\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_2 dx^i dx^2+\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_3 dx^i dx^3\\&=(\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_1)dx^1dx^1+(\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_1)dx^2dx^1+(\boldsymbol{e}_3\cdot\boldsymbol{e}_1)dx^3dx^1\\&\quad+(\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2)dx^1dx^2+(\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_2)dx^2dx^2+(\boldsymbol{e}_3\cdot\boldsymbol{e}_2)dx^3dx^2\\&\quad+(\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_3)dx^1dx^3+(\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_3)dx^2dx^3+(\boldsymbol{e}_3\cdot\boldsymbol{e}_3)dx^3dx^3\end{aligned}$$

或
$$(ds)^2=[dx^1\ dx^2\ dx^3]\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_3\\ \boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_3\\ \boldsymbol{e}_3\cdot\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_3\cdot\boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3\cdot\boldsymbol{e}_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}dx^1\\dx^2\\dx^3\end{bmatrix}$$

令第二个矩阵的元素为g_{ij}，则

$$g_{ij}=\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j$$

现讨论g_{ij}的特性：

1. g_{ij}的表达式

根据g_{ij}的定义，

$$\begin{aligned}g_{ij}&=\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j=\frac{\partial y^n}{\partial x^i}\boldsymbol{u}_n\cdot\frac{\partial y^m}{\partial x^j}\boldsymbol{u}_m\\&=\frac{\partial y^n}{\partial x^i}\frac{\partial y^m}{\partial x^j}(\boldsymbol{u}_n\cdot\boldsymbol{u}_m)\end{aligned}$$

已知
$$\boldsymbol{u}_n\cdot\boldsymbol{u}_m=\delta_{nm}$$

因而
$$g_{ij}=\frac{\partial y^n}{\partial x^i}\frac{\partial y^m}{\partial x^j}\delta_{nm}=\frac{\partial y^n}{\partial x^i}\frac{\partial y^n}{\partial x^j}$$

或

$$g_{ij}=\frac{\partial y^1}{\partial x^i}\frac{\partial y^1}{\partial x^j}+\frac{\partial y^2}{\partial x^i}\frac{\partial y^2}{\partial x^j}+\frac{\partial y^3}{\partial x^i}\frac{\partial y^3}{\partial x^j} \tag{8-14}$$

2. 由于 $\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j=\boldsymbol{e}_j\cdot\boldsymbol{e}_i$，所以 $g_{ij}=g_{ji}$，即元素的下指标可以交换。

3. 如果是正交曲线坐标，则

$$\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j=\begin{cases} g_{ii}(i=j) \\ 0\ (i\neq j)\end{cases}$$

式中 $g_{ii}=h_i^2=\left(\frac{\partial y^1}{\partial x^i}\right)^2+\left(\frac{\partial y^2}{\partial x^i}\right)^2+\left(\frac{\partial y^3}{\partial x^i}\right)^2$，而 h_i 为正交曲线坐标系的拉梅系数。注意：此处 g_{ii} 中的下指标"i"并非求和指标。于是，第二个矩阵可改写成

$$\begin{bmatrix} g_{11} & 0 & 0 \\ 0 & g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & g_{33}\end{bmatrix}$$

4. 如果是正交笛卡尔坐标系，由于

$$\boldsymbol{e}_i=\boldsymbol{u}_i$$

矩阵退化为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

而 g_{ij} 则退化为 δ_{ij}。

5. 令 g 为第二个矩阵的行列式，则

$$g=\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{e}_3\cdot\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_3\cdot\boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3\cdot\boldsymbol{e}_3\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33}\end{vmatrix}\begin{vmatrix} e_{11} & e_{21} & e_{31} \\ e_{12} & e_{22} & e_{32} \\ e_{13} & e_{23} & e_{33}\end{vmatrix}$$

或

$$g=\begin{vmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33}\end{vmatrix}^2=[\boldsymbol{e}_1\cdot(\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3)]^2=V^2$$

对于笛卡尔坐标系，应是 $g=1$。

6．以后将会证明，由 g_{ij} 构成的九个元素组成一个二阶普遍张量，这一张量称度量张量。度量张量的行列式将是 x^i 的函数，即 g 随空间位置而变，这样，对所选取的坐标系，由其确定的空间必将形成一度量张量场。

7．应用度量张量元素 g_{ij} 可区别各种坐标系如下：

(1) 正交笛卡尔坐标系——$g_{ij}=\delta_{ij}$

(2) 斜交笛卡尔坐标系

$$g_{ij}\begin{cases}\neq 0(i\neq j)\\ =1(i=j)\end{cases}$$

(3) 正交曲线坐标系

$$g_{ij}=\delta_{ij}g_{ij}=h_j^2(\text{令 } h_j^2=g_{jj})$$

(4) 斜交曲线坐标系

$$g_{ij}\neq 0,\ 1$$

下面分别求出柱坐标系和球坐标系的度量张量。

对于柱坐标系，$g_{11}=g_{rr}$、$g_{22}=g_{\varphi\varphi}$、$g_{33}=g_{zz}$，因而

$$g_{rr}=\boldsymbol{e}_r\cdot\boldsymbol{e}_r=(\cos\varphi\,\boldsymbol{u}_1+\sin\varphi\,\boldsymbol{u}_2)\cdot(\cos\varphi\,\boldsymbol{u}_1+\sin\varphi\,\boldsymbol{u}_2)=1$$

$$g_{\varphi\varphi}=\boldsymbol{e}_\varphi\cdot\boldsymbol{e}_\varphi=r(-\sin\varphi\,\boldsymbol{u}_1+\cos\varphi\,\boldsymbol{u}_2)\cdot r(-\sin\varphi\,\boldsymbol{u}_1+\cos\varphi\,\boldsymbol{u}_2)=r^2$$

$$g_{zz}=\boldsymbol{e}_z\cdot\boldsymbol{e}_z=\boldsymbol{u}_3\cdot\boldsymbol{u}_3=1$$

于是，得柱坐标系的度量张量及其行列式为

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&r^2&0\\0&0&1\end{bmatrix}\quad\text{而}\quad g=r^2$$

至于球坐标系，则有

$$g_{11}=g_{RR}=|\boldsymbol{e}_R|^2=\sin^2\theta\cos^2\varphi+\sin^2\theta\sin^2\varphi+\cos^2\theta=1$$

$$g_{22}=g_{\theta\theta}=|\boldsymbol{e}_\theta|^2=(R\cos\theta\cos\varphi)^2+(R\cos\theta\sin\varphi)^2+(-R\sin\theta)^2=R^2$$

$$g_{33}=g_{\varphi\varphi}=|\boldsymbol{e}_\varphi|^2=(-R\sin\theta\sin\varphi)^2+(R\sin\theta\cos\varphi)^2$$
$$=R^2\sin^2\theta$$

于是得球坐标系下的度量张量及其行列式为

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & R^2 & 0\\ 0 & 0 & R^2\sin^2\theta\end{bmatrix},\quad g=R^4\sin^2\theta$$

以上是当 $d\boldsymbol{r}_P$ 向基本矢量 $\boldsymbol{e}_i$ 方向分解时得到的结果。由第一章的讨论可知，$d\boldsymbol{r}_P$ 也可向倒易基本矢量 $\boldsymbol{e}^i$ 方向分解，即可将 $d\boldsymbol{r}_P$ 写成

$$d\boldsymbol{r}_P=\boldsymbol{e}^i dx_i=\boldsymbol{e}^j dx_j$$

式中 dx_i、dx_j 分别表示 $d\boldsymbol{r}_P$ 的协变分量。于是

$$(ds)^2=d\boldsymbol{r}_P\cdot d\boldsymbol{r}_P=\boldsymbol{e}^i\cdot\boldsymbol{e}^j dx_i dx_j=g^{ij}dx_i dx_j \tag{3-15}$$

式(3-15)中的 g^{ij} 称倒易度量张量元素。和度量张量相类似，对于正交曲线坐标系，其元素应为

$$g^{ij}=\begin{cases}0(i\neq j)\\ \left(\dfrac{\partial x^i}{\partial y^1}\right)^2+\left(\dfrac{\partial x^i}{\partial y^2}\right)^2+\left(\dfrac{\partial x^i}{\partial y^3}\right)^2\end{cases}$$

同样，对于柱坐标系，应是

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \dfrac{1}{r^2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\quad g'=\frac{1}{r^2}\ (g'\ 为矩阵行列式)$$

至于球坐标系，则为

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \dfrac{1}{R^2} & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{1}{R^2\sin^2\theta}\end{bmatrix},\quad g'=\frac{1}{R^4\sin^2\theta}$$

而微元长度 ds^2 可分别表示成

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2$$

$$ds^2 = dR^2 + R^2 d\theta^2 + R^2 \sin^2\theta\, d\phi^2$$

附带说明，引进 g^{ij}, g_{ij} 后，$\boldsymbol{e}_i$、$\boldsymbol{e}^i$ 可表示成

$$\boldsymbol{e}_i = \sqrt{g_{ii}}\,\boldsymbol{l}_i;\quad \boldsymbol{e}^i = \sqrt{g^{ii}}\,\boldsymbol{l}^i$$

对于笛卡尔坐标系，同样有 $g^{ij} = \delta_{ij}$, $g = 1$。

(二) 微元面积 $d\sigma_{ij}$ 的表达式

令 $d\sigma_{ij}$ 为 $d\boldsymbol{S}_i$、$d\boldsymbol{S}_j$ 构成的微元面积，则根据两矢量的矢性积，应得

$$d\sigma_{ij} = d\boldsymbol{S}_i \times d\boldsymbol{S}_j = \boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j\, dx^i dx^j \quad (i、j\ 为非求和指标)$$

已知

$$\boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j = V\varepsilon_{ijk}\boldsymbol{e}^k,\quad \boldsymbol{e}^k = |\boldsymbol{e}^k|\,\boldsymbol{l}^k = \sqrt{g^{kk}}\,\boldsymbol{l}^k$$

式中 $g^{kk} = \boldsymbol{e}^k \cdot \boldsymbol{e}^k$，由此可得

$$d\sigma_{ij} = V\varepsilon_{ijk}\, dx^i dx^j \boldsymbol{e}^k$$

或

$$d\sigma_{ij} = \sqrt{gg^{kk}}\,\varepsilon_{ijk}\, dx^i dx^j \boldsymbol{l}^k \tag{3-16}$$

对于正交曲线坐标系，$\boldsymbol{l}^k = \boldsymbol{l}_k$，因而式(3-16)可改写成

$$d\sigma_{ij} = \sqrt{gg^{kk}}\,\varepsilon_{ijk}\, dx^i dx^j \boldsymbol{l}_k \tag{3-16$'$}$$

于是，对于柱坐标，应得

$$\left.\begin{aligned} d\sigma_{\varphi z} &= \sqrt{gg^{rr}}\, dz\, d\varphi\, \boldsymbol{l}_r = r\, dz\, d\varphi\, \boldsymbol{l}_r \\ d\sigma_{zr} &= \sqrt{gg^{\varphi\varphi}}\, dz\, dr\, \boldsymbol{l}_\varphi = dr\, dz\, \boldsymbol{l}_\varphi \\ d\sigma_{r\varphi} &= \sqrt{gg^{zz}}\, dr\, d\varphi\, \boldsymbol{l}_z = r\, dr\, d\varphi\, \boldsymbol{l}_z \end{aligned}\right\} \tag{3-17}$$

对于球坐标，则有

$$\left.\begin{aligned} d\sigma_{\theta\varphi} &= \sqrt{gh^{RR}}\, d\theta\, d\varphi\, \boldsymbol{l}_R = R^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, \boldsymbol{l}_R \\ d\sigma_{\varphi R} &= \sqrt{gg^{\theta\theta}}\, dR\, d\varphi\, \boldsymbol{l}_\theta = R\sin\theta\, dR\, d\varphi\, \boldsymbol{l}_\theta \\ d\sigma_{R\theta} &= \sqrt{gg^{\varphi\varphi}}\, dR\, d\theta\, \boldsymbol{l}_\varphi = R\, d\theta\, dR\boldsymbol{l}_\varphi \end{aligned}\right\} \tag{3-17$'$}$$

(三) 微元体积 dV

根据矢量的数性三重积定义，由 ds_i 为棱边的体积 dV 可表示

则

$$dV = d\boldsymbol{s}_i \cdot (d\boldsymbol{s}_j \times d\boldsymbol{s}_k) = [\boldsymbol{e}_i \cdot (\boldsymbol{e}_j \times \boldsymbol{e}_k)]\, dx^i\, dx^j\, dx^k$$

已知 $[\boldsymbol{e}_i \cdot (\boldsymbol{e}_j \times \boldsymbol{e}_k)] = \sqrt{g}$，于是

$$dV = \sqrt{g}\, dx^i\, dx^j\, dx^k \tag{3-18}$$

由于 $\boldsymbol{e}_i \cdot (\boldsymbol{e}_j \times \boldsymbol{e}_k)$ 可表示为

$$\begin{vmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial y^1}{\partial x^1} & \dfrac{\partial y^2}{\partial x^1} & \dfrac{\partial y^3}{\partial x^1} \\ \dfrac{\partial y^1}{\partial x^2} & \dfrac{\partial y^2}{\partial x^2} & \dfrac{\partial y^3}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial y^1}{\partial x^3} & \dfrac{\partial y^2}{\partial x^3} & \dfrac{\partial y^3}{\partial x^3} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\partial(y^1,\ y^2,\ y^3)}{\partial(x^1,\ x^2,\ x^3)} = J \tag{3-19}$$

$J = \dfrac{\partial(y^1,\ y^2,\ y^3)}{\partial(x^1,\ x^2,\ x^3)}$ 为雅可比行列式。于是式(3-18)又可改写成

$$dV = J\, dx^i\, dx^j\, dx^k \tag{3-20}$$

应用以上结果，可将柱坐标系、球坐标系下的微元体积 dV 分别表示成

$$dV = r\, dr\, d\varphi\, dz$$

$$dV = R^2 \sin\theta\, dR\, d\theta\, d\varphi$$

除此以外，由于微元矢量也可以沿倒易矢量 $\boldsymbol{e}^i$ 方向选取，如以 dV' 表示 $d\boldsymbol{s}^i = \boldsymbol{e}^i dx_i$ 构成的体积，则

$$dV' = [\boldsymbol{e}^i \cdot (\boldsymbol{e}^j \times \boldsymbol{e}^k)]\, dx_i\, dx_j\, dx_k$$

或

$$dV' = \sqrt{g'}\, dx_i\, dx_j\, dx_k = J'\, dx_i\, dx_j\, dx_k \tag{3-18$'$}$$

于是

$$J' = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x^1}{\partial y^1} & \dfrac{\partial x^1}{\partial y^2} & \dfrac{\partial x^1}{\partial y^3} \\ \dfrac{\partial x^2}{\partial y^1} & \dfrac{\partial x^2}{\partial y^2} & \dfrac{\partial x^2}{\partial y^3} \\ \dfrac{\partial x^3}{\partial y^1} & \dfrac{\partial x^3}{\partial y^2} & \dfrac{\partial x^3}{\partial y^3} \end{vmatrix} \tag{3-19$'$}$$

由式(3-19)、(3-19)′可见，要使所选用的曲线坐标系有意义，则要求 $J\neq0$, $J'\neq0$。这一结果的几何意义是很明显的，因为，如果 $J=0$ 或 $J'=0$，则 $\boldsymbol{e}^i$ 或 $\boldsymbol{e}_i$ 共平面，即它们不可能构成体积。

又因为 J、J' 互为倒数，所以要求 J、J' 不为零，实际上，要求 J、J' 应满足

$$0<J<\infty;\ 0<J'<\infty$$

（四）θ_{ij} 的表达式

在斜交曲线坐标系下，$\boldsymbol{e}_i$ 和 $\boldsymbol{e}_j$ 不成正交，它们之间的夹角 θ_{ij} 也可由 $\boldsymbol{e}_i$、$\boldsymbol{e}_j$ 的数性积来确定，即

$$\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j=|\boldsymbol{e}_i|\,|\boldsymbol{e}_j|\cos\theta_{ij} \tag{a}$$

已知

$$\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j=g_{ij},\ \ |\boldsymbol{e}_i|=\sqrt{g_{ii}},\ \ |\boldsymbol{e}_j|=\sqrt{g_{jj}} \tag{b}$$

式中 g_{ii}、g_{jj} 中的"i"及"j"都不是求和指标。

于是必有

$$g_{ij}=\sqrt{g_{ii}g_{jj}}\cos\theta_{ij}$$

或

$$\cos\theta_{ij}=\frac{g_{ij}}{\sqrt{g_{ii}g_{jj}}} \tag{3-21}$$

对于正交的曲线坐标系，由于 $g_{ij}=0$，所以 $\cos\theta_{ij}=0$, $\theta_{ij}=\pi/2$。

由以上讨论得知，要使所选用的斜交曲线坐标有实用价值，除满足 $x^i=x^i(y^1, y^2, y^3)$ 单值、连续、一阶偏导数存在以外，还应满足变换雅可比行列式 J 以及反变换雅可比行列式 J' 不为零或不为无穷大。

附带说明一点，在引进度量张量和倒易度量张量以后，由于

$$\boldsymbol{A}=A_i\boldsymbol{e}^i=A^i\boldsymbol{e}_i;\ \boldsymbol{B}=B_j\boldsymbol{e}_j=B_j\boldsymbol{e}^j$$

所以 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ 的分量表达式有下列几种可能形式，即

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=A_i\boldsymbol{e}^i\cdot B_j\boldsymbol{e}^j=A^i\boldsymbol{e}_i\cdot B_j\boldsymbol{e}^j=A^i\boldsymbol{e}_i\cdot B_j\boldsymbol{e}^j=A_i\boldsymbol{e}^i\cdot B^j\boldsymbol{e}_j$$

由于 $\boldsymbol{e}^i\cdot\boldsymbol{e}^j=g^{ij},\ \boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}^j=\delta_i^j,\ \boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j=g_{ij}$

则 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=A_iB_jg^{ij}=A^iB^jg_{ij}=A_iB^i=A^jB_j$

第四节 度量张量元素与倒易度量张量元素间的关系

上一节引进了度量张量和倒易度量张量的定义。由于这两个张量在今后讨论中有着重要的意义，因此，这一节将着重讨论两者关系。

由 $\boldsymbol{e}^i=\dfrac{\boldsymbol{e}_j\times\boldsymbol{e}_k}{\boldsymbol{e}_i\cdot(\boldsymbol{e}_j\times\boldsymbol{e}_k)},\quad \boldsymbol{e}^j=\dfrac{\boldsymbol{e}_k\times\boldsymbol{e}_i}{\boldsymbol{e}_i\cdot(\boldsymbol{e}_j\times\boldsymbol{e}_k)}$

得

$$g^{ij}=\boldsymbol{e}^i\cdot\boldsymbol{e}^j=\frac{(\boldsymbol{e}_j\times\boldsymbol{e}_k)\cdot(\boldsymbol{e}_k\times\boldsymbol{e}_i)}{[\boldsymbol{e}_i\cdot(\boldsymbol{e}_j\times\boldsymbol{e}_k)]^2} \tag{a}$$

又 $(\boldsymbol{e}_j\times\boldsymbol{e}_k)\cdot(\boldsymbol{e}_k\times\boldsymbol{e}_i)=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_j\cdot\boldsymbol{e}_k & \boldsymbol{e}_j\cdot\boldsymbol{e}_i\\ \boldsymbol{e}_k\cdot\boldsymbol{e}_k & \boldsymbol{e}_k\cdot\boldsymbol{e}_i\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}g_{jk} & g_{ji}\\ g_{kk} & g_{ki}\end{vmatrix}$ [1]

或 $(\boldsymbol{e}_j\times\boldsymbol{e}_k)\cdot(\boldsymbol{e}_k\times\boldsymbol{e}_i)=-\begin{vmatrix}g_{ij} & g_{jk}\\ g_{ik} & g_{kk}\end{vmatrix}$

如令

$$G_{ij}=-\begin{vmatrix}g_{ij} & g_{jk}\\ g_{ik} & g_{kk}\end{vmatrix} \tag{b}$$

则由于度量张量行列式可写成

$$g=\begin{vmatrix}g_{ii} & g_{ij} & g_{ik}\\ g_{ji} & g_{jj} & g_{jk}\\ g_{ki} & g_{kj} & g_{kk}\end{vmatrix}$$

---

[1] 由矢量恒等式

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=\boldsymbol{a}\cdot[\boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})]$$
$$=\boldsymbol{a}\cdot[(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{d}]=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$$
$$=\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d}\\ \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d}\end{vmatrix}$$

可见 G_{ij} 是 g 的子行列式。

同时，由度量张量的性质，有

$$[\boldsymbol{e}_i\cdot(\boldsymbol{e}_j\times\boldsymbol{e}_k)]^2=V^2=g \tag{c}$$

将式(b)、(c)分别代入式(a)，可得

$$g^{ij}=\frac{G_{ij}}{g} \tag{3-22}$$

这样，即初步求得倒易度量张量元素与度量张量元素间的关系。但式(3-22)仍有不方便之处，还可加以简化。

事实上，由行列式性质，在一般情况下为

$$g=g_{i1}G_{i1}+g_{i2}G_{i2}+\cdots+g_{ij}G_{ij}+\cdots+g_{in}G_{in}$$

于是

$$G_{ij}=\frac{\partial g}{\partial g_{ij}}$$

式(3-22)可改写成

$$g^{ij}=\frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial g_{ij}}=\frac{\partial}{\partial g_{ij}}(\ln g) \tag{3-23}$$

以上关系式对今后的讨论有着十分重要的意义。

第五节 矢量在斜交曲线坐标系下，各种分量间的相互关系

从以上讨论得知，采用基本矢量 $\boldsymbol{e}_i$ 和倒易基本矢量 $\boldsymbol{e}^i$，可使一个矢量 $\boldsymbol{A}$ 在斜交条件下写出分解式。但是，由于在斜交曲线坐标系下，基本矢量 $\boldsymbol{e}_i$ 及倒易基本矢量 $\boldsymbol{e}^i$ 因次不一定相同。为保证 $\boldsymbol{A}^i\boldsymbol{e}_i$ 或 $\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{e}^i$ 的因次和矢量 $\boldsymbol{A}$ 的因次相同，A^i 或 A_i 的因次有可能不相同。由于这一原因，矢量 $\boldsymbol{A}$ 的协变分量 A_i 及逆变分量 A^i 没有物理意义或几何意义，引进这两类分量，纯粹是为了将矢量 $\boldsymbol{A}$ 在斜交条件下写出分解式。

若沿 $\boldsymbol{e}^i$ 及 $\boldsymbol{e}_i$ 方向分别取单位矢量 $\boldsymbol{l}^i$ 及 $\boldsymbol{l}_i$，则在第一章中已明

而

$$a_i = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{l}_i,\ a^i = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{l}^i$$

为协变物理分量和逆变物理分量。由于所取的单位矢量 $\boldsymbol{l}_i$、$\boldsymbol{l}^i$ 是无因次的，所以 a_i、a^i 的因次和 $\boldsymbol{A}$ 的因次相同，但不可能将 $\boldsymbol{A}$ 在斜交条件下，用 a^i 或 a_i 写出分解式(见图 3-8)，也不可能利用 a^i 或 a_i 来进行一系列的分析、运算。

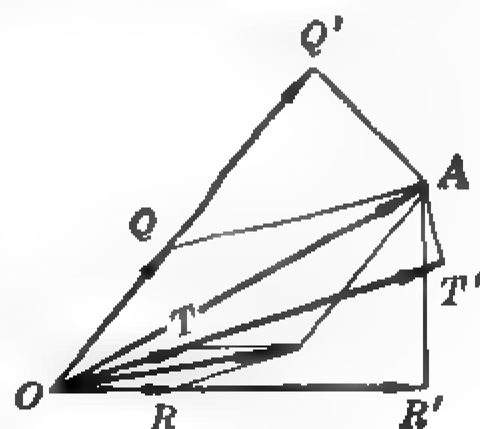


图 3-8

这样，两类分量各有优缺点。为了充分利用它们，在分析、运算时采用协变、逆变分量，当得到最后结果再转换为物理分量。

要做到这一点，就必须找到两者之间的相互关系，本节将着重讨论这一问题。

(一) 协变、逆变物理分量与逆变、协变分量间的关系

由两类分量的定义式

$$a_i = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{l}_i \text{ 及 } \boldsymbol{e}_i = \sqrt{g_{ii}}\,\boldsymbol{l}_i$$

可得

$$a_i = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{l}_i = \boldsymbol{A}\cdot\left(\frac{\boldsymbol{e}_i}{\sqrt{g_{ii}}}\right) = \frac{1}{\sqrt{g_{ii}}}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}_i$$

已知

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}_i = A_i$$

所以

$$A_i = \sqrt{g_{ii}}\,a_i \tag{3-24}$$

同理可得

$$A^i = \sqrt{g^{ii}}\,a^i \tag{3-25}$$

(二) 协变分量和逆变分量间的关系

由于
$$\boldsymbol{A} = A^j\boldsymbol{e}_j$$

将上式左右两边与 $\boldsymbol{e}_i$ 作数性积，得

同理，有

$$\left.\begin{aligned} A_i &= \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}_i = A^j(\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j) = g_{ij}A^j \\ A^i &= g^{ij}A_j \end{aligned}\right\} \tag{3-26}$$

式(3-26)可分别写成

$$\left.\begin{aligned} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A^1 \\ A^2 \\ A^3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} A^1 \\ A^2 \\ A^3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} g^{11} & g^{12} & g^{13} \\ g^{21} & g^{22} & g^{23} \\ g^{31} & g^{32} & g^{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} \end{aligned}\right\}$$

如是正交曲线坐标系，则因

$$g^{ij} = g_{ij} = 0 \ (i \neq j)$$

于是，在正交条件下，协变、逆变分量间的关系为

$$A_i = g_{ii}A^i, \ A^i = g^{ii}A_i \tag{3-27}$$

注意：式(3-27)中的“i”并非求和指标。

在笛卡尔坐标系下，逆变分量和协变分量就是投影分量，不存在相互变换的问题，但如要写出相应的关系，则为

$$A_i = \delta_{ij}A_j$$

今以速度 $\boldsymbol{v}$ 为例，求出柱坐标系、球坐标系下，逆变、协变分量间的关系以及它们与物理分量间的关系。

1．柱坐标系

由于在柱坐标系下，$g_{11}=g_{rr}=1$、$g_{22}=g_{\varphi\varphi}=r^2$、$g_{33}=g_{zz}=1$，所以

$$\left.\begin{aligned} & V_r = V^r、V_\varphi = r^2V^\varphi、V_z = V^z \\ \text{式中}\quad & V_r、V_\varphi、V_z \text{ 为速度 } \boldsymbol{v} \text{ 的协变分量；} \\ & V^r、V^\varphi、V^z \text{ 为速度 } \boldsymbol{v} \text{ 的逆变分量。} \\ & \mathrm{v}_r = V_r、\mathrm{v}_\varphi = \frac{1}{r}V_\varphi、\mathrm{v}_z = V^z \\ & \mathrm{v}^r = V^r、\mathrm{v}^\varphi = rV^\varphi，\mathrm{v}_z = V^z \end{aligned}\right\} \tag{3-28}$$

式中　v_r、v_φ、v_z 为速度 v 的协变物理分量；

　　v^r、v^φ、v^z 为速度 v 的逆变物理分量。

2．球坐标系

对于球坐标系，因

$$g_{11}=g_{RR}=1,\ g_{22}=g_{\theta\theta}=R^2,\ g_{33}=g_{\varphi\varphi}=R^2\sin^2\theta$$

所以

$$\left.\begin{aligned}&v_R=V^R,\ v_\theta=R^2V^\theta,\ v_\varphi=R^2\sin^2\theta\,V^\varphi\\&v_R=V_R,\ v_\theta=\frac{1}{R}V_\theta,\ v_\varphi=\frac{1}{R\sin\theta}\varphi_\varphi\\&v^R=V^R,\ v^\theta=V^\theta,\ v^\varphi=R\sin\theta\,\varphi^\varphi\end{aligned}\right\}\tag{3-29}$$

由式(3-28)、(3-29)，可以证明

$$\left.\begin{aligned}&v_r=v^r、v_\varphi=v^\varphi、v_z=v^z\\&v_R=v^R、v_\theta=v^\theta,\ v_\varphi=v^\varphi\end{aligned}\right\}\tag{3-30}$$

即在柱、球坐标系下，不必区分逆变物理分量和协变物理分量。下面还将证明所有的正交曲线坐标系都具有这一性质。

除此以外，对于微元位置矢量 $d\boldsymbol{r}_P$ 的逆变、协变分量，也可建立起类似的关系

$$\left.\begin{aligned}&dx^i=g^{ij}\,dx_j\\&dx_i=g_{ij}\,dx^j\end{aligned}\right\}\tag{3-31}$$

（三）基本矢量和倒易基本矢量间的变换关系

基本矢量 $\boldsymbol{e}_i$ 既是一个矢量，就可以向倒易基本矢量方向分解并写出分解式

$$\boldsymbol{e}_i=(\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j)\boldsymbol{e}^j$$

由已知定义式

$$\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j=g_{ij}$$

可得

同理亦可得

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{e}_i=g_{ij}\boldsymbol{e}^j\\&\boldsymbol{e}^i=g^{ij}\boldsymbol{e}_j\end{aligned}\right\}\tag{3-32}$$

$$\left.\begin{aligned}e_i=(e_i\cdot e^j)e_j=\delta_i{}^j e_j\\ e^i=(e^i\cdot e_j)e^j=\delta_j{}^i e^j\end{aligned}\right\} \qquad (3\text{-}32)'$$

如为正交曲线坐标系，则

$$e_i=g_{ii}e^i;\ e^i=g^{ii}e_i$$

式(3-32)即为所需要的基本矢量与倒易基本矢量之变换关系，就这一意义而言，g_{ij} 可看成是 e_i 的协变分量，而 g^{ij} 则是 e^i 的逆变分量，$\delta_i{}^j$、$\delta_j{}^i$ 是 e_i 及 e^i 的逆变与协变分量。

将式(3-32)左右两边与 e^k 作数性积，则得

$$e_i\cdot e^k=g_{ij}(e^j\cdot e^k)$$

因已知
$$e_i\cdot e^k=\delta_i{}^k,\ e^j\cdot e^k=g^{jk}$$

于是

$$\left.\begin{aligned}g_{ij}g^{jk}=\delta_i{}^k\\ g_{ij}g^{ij}=\delta_i{}^i=3\end{aligned}\right\} \qquad (3\text{-}33)$$

这一关系式和在笛卡尔坐标系下

$$\delta_{ij}\delta_{jk}=\delta_{ik}$$

相当。

或以矩阵表示，则有

$$\begin{bmatrix}g_{11}&g_{12}&g_{13}\\g_{21}&g_{22}&g_{23}\\g_{31}&g_{32}&g_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}g^{11}&g^{12}&g^{13}\\g^{21}&g^{22}&g^{23}\\g^{31}&g^{32}&g^{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

如将式(3-33)展开，则(例如)

$$g_{11}g^{11}+g_{12}g^{21}+g_{13}g^{31}=1 \quad (i=1,\ k=1)$$

$$g_{11}g^{12}+g_{12}g^{22}+g_{13}g^{32}=0 \quad (i=1,\ k=2)$$

[例题 1] 试应用 $g^{ij}=G_{ij}/g$ 证明 $g_{ij}g^{jk}=\delta_i^k$

证： 由度量张量及倒易度量张量的对称性当 $i=k$ 时，

$$g_{ij}g^{jk}=g_{ij}g^{ji}=g_{ij}g^{ij}=g_{ij}\frac{G_{ij}}{g}$$

因 $g_{ij}G_{ij}=g$，所以

$$g_{ij}g^{jk}=1$$

如果 $i\neq k$，由于 $g^{jk}=G_{jk}/g$，则

$$g_{ij}g^{jk}=(g_{ij}G_{jk})\frac{1}{g}=0$$

于是

$$g_{ij}g^{jk}=\begin{cases}1 & (i=k)\\ 0 & (i\neq k)\end{cases}$$

即

$$g_{ij}g^{jk}=\delta_i^k$$

通过以上例题，可从不同角度证明关系式(3-33)成立。

除此以外，我们从式(3-33)可看出，式(3-33)实际上可表示成

$$\begin{bmatrix}g_{11} & g_{12} & g_{13}\\ g_{21} & g_{22} & g_{23}\\ g_{31} & g_{32} & g_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}g^{11} & g^{12} & g^{13}\\ g^{21} & g^{22} & g^{23}\\ g^{31} & g^{32} & g^{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

或

$$[g_{ij}][g^{jk}]=[\delta_{ij}]$$

即 $[g^{jk}]$ 是 $[g_{ij}]$ 的逆矩阵，加上 $[g_{ij}]$ 和 $[g^{jk}]$ 均为对称矩阵，因而必有

$$g^{ij}=\frac{G_{ij}}{g}$$

对于正交曲线坐标系，由于 $g^{ij}=g_{ij}=0(i\neq j)$，则以上结果退化为

$$\left.\begin{array}{l}g^{11}g_{11}=1、g^{22}g_{22}=1、g^{33}g_{33}=1\\ g^{ii}g_{ii}=1\end{array}\right\}\tag{3-34}$$

或（上式第二行）

利用式(3-34)，可进一步求得正交曲线坐标系下 a^i 与 a_i 间的关系式如下：

由

$$A_i=\sqrt{g_{ii}}\,a_i，\ A^i=\sqrt{g^{ii}}\,a^i$$

$$A^i=g_{ii}A^i$$

将第一、二两式分别代入第三式，则

$$a_i=\sqrt{g^{ii}g_{ii}}\,a^i$$

由式(3-34)可得

$$a_i=a^i\tag{3-35}$$

对于正交曲线坐标系，由于 $\boldsymbol{l}_i=\boldsymbol{l}^i$，即对应的基本矢量和倒易基本矢量方向相同，所以

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{l}_i=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{l}^i,\ a_i=a^i。$$

（四）、应用以上结果，还可求得斜交条件下 a_i、a^i 之间以及 a_i 与 A^i 间的关系，由

$$A_i=g_{ij}A^j、A_i=\sqrt{g_{ii}}\,a_i、A^j=\sqrt{g^{jj}}\,a^j$$

可得
$$\sqrt{g_{ii}}\,a_i=g_{ij}\sqrt{g^{jj}}\,a^j$$

$$a_i=g_{ij}\sqrt{g^{jj}}\frac{1}{\sqrt{g_{ii}}}a^j$$

或
$$a_i=\sqrt{g^{jj}g_{jj}}\frac{g_{ij}}{\sqrt{g_{ii}g_{jj}}}a^j$$

但因
$$\cos\theta_{ij}=g_{ij}/\sqrt{g_{ii}g_{jj}}$$

于是可得 a_i、a^j 之间的关系式为

$$a_i=\sqrt{g_{jj}h^{jj}}\cos\theta_{ij}a^j \tag{3-36}$$

展开之，得（令 $i=1$）

$$a_1=\sqrt{g_{11}g^{11}}\cos\theta_{11}a^1+\sqrt{g_{22}g^{22}}\cos\theta_{12}a^2+\sqrt{g_{33}g^{33}}\cos\theta_{13}a^3$$

由于 $\cos\theta_{11}=1$，$\sqrt{g^{ii}}a^i=A^i$，因此上式又可写成

或
$$\left.\begin{aligned}a_1&=\sqrt{g^{11}g_{11}}\,a^1+\sqrt{g_{22}g^{22}}\cos\theta_{12}a^2+\sqrt{g_{33}g^{33}}\cos\theta_{13}a^3\\ a_1&=\sqrt{g_{11}}A^1+\sqrt{g_{22}}\cos\theta_{12}A^2+\sqrt{g_{33}}\cos\theta_{13}A^3\end{aligned}\right\}$$

(3-37)

（五） 当坐标系为正交时，应是

$$a^i=a_i、a_i=\sqrt{g_{ii}}\,A^i（或\ A^i=\sqrt{g^{ii}}\,a^i）$$

由
$$\boldsymbol{A}=A^i\boldsymbol{e}_i$$

$$\boldsymbol{e}_i=\sqrt{g_{ii}}\,\boldsymbol{l}_i$$

可得
$$\boldsymbol{A}=A^i\sqrt{g_{ii}}\,\boldsymbol{l}_i$$

这里的 $A^i\sqrt{g_{ii}}$ 是矢量 $\boldsymbol{A}$ 之可分解分量的模，如令

$$a_i=A^i\sqrt{g_{ii}}$$

则 $$\boldsymbol{A}=a_i\boldsymbol{l}_i$$

或
$$\left.\begin{aligned}a_i&=A^i\sqrt{g_{ii}}=\sqrt{g_{ii}}\,g^{ij}A_j\\a_i&=\sqrt{g_{ii}}\,g^{ij}\sqrt{g_{jj}}\,a_j\end{aligned}\right\}\tag{3-38}$$

（六）以上已求得在斜交曲线坐标系下，矢量 $\boldsymbol{A}$ 各个分量间的相互关系。但这些分量都是相对于斜交曲线坐标系的，而斜交曲线坐标系的局部标架不仅方向随空间位置变化，其基本矢量 $\boldsymbol{e}_i$ 和倒易基本矢量 $\boldsymbol{e}^i$ 也是 x^i 的函数，所以，这些分量不可能提供明确的概念。为了便于分析，下面进一步求得矢量 $\boldsymbol{A}$ 的协变分量与笛卡尔坐标系的诸分量间的关系。

由 $$\boldsymbol{A}=A^i\boldsymbol{e}_i$$

$$\boldsymbol{e}_i=\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\boldsymbol{u}_j$$

可得

$$\boldsymbol{A}=A^i\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\boldsymbol{u}_j\tag{3-39}$$

由于 $\boldsymbol{u}_j$ 是笛卡尔坐标系的单位矢量，因此可将上式看成是矢量 $\boldsymbol{A}$ 向 $\boldsymbol{u}_j$ 方向的分解式，如令 $A(j)$ 为矢量 $\boldsymbol{A}$ 在笛卡尔坐标系下的分量，则

$$\boldsymbol{A}=A(j)\boldsymbol{u}_j$$

式中 $A(j)=A^i\frac{\partial y^j}{\partial x^i}=A^1\frac{\partial y^j}{\partial x^1}+A^2\frac{\partial y^j}{\partial x^2}+A^3\frac{\partial y^j}{\partial x^3}$，展开之，得

$$\left.\begin{aligned}A(1)&=A^1\frac{\partial y^1}{\partial x^1}+A^2\frac{\partial y^1}{\partial x^2}+A^3\frac{\partial y^1}{\partial x^3}\\A(2)&=A^1\frac{\partial y^2}{\partial x^1}+A^2\frac{\partial y^2}{\partial x^2}+A^3\frac{\partial y^2}{\partial x^3}\\A(3)&=A^1\frac{\partial y^3}{\partial x^1}+A^2\frac{\partial y^3}{\partial x^2}+A^3\frac{\partial y^3}{\partial x^3}\end{aligned}\right\}\tag{3-39$'$}$$

或

$$\begin{bmatrix} A(1) \\ A(2) \\ A(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y^1}{\partial x^1} & \frac{\partial y^1}{\partial x^2} & \frac{\partial y^1}{\partial x^3} \\ \frac{\partial y^2}{\partial x^1} & \frac{\partial y^2}{\partial x^2} & \frac{\partial y^2}{\partial x^3} \\ \frac{\partial y^3}{\partial x^1} & \frac{\partial y^3}{\partial x^2} & \frac{\partial y^3}{\partial x^3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^1 \\ A^2 \\ A^3 \end{bmatrix}$$

由此可见，只要知道 A^i 以及雅可比行列式，立即可求得矢量 $\boldsymbol{A}$ 在笛卡尔坐标系下的投影分量。

第六节 矢量在斜交曲线坐标系下的协变变换和逆变变换

第一章曾经讨论过矢量在笛卡尔坐标系下的变换，这一章实际上是分析笛卡尔坐标系和斜交曲线坐标系间的相互变换。对于后者的讨论是以下列几点作为基础的：

（一）曲线坐标 x^i 和笛卡尔坐标 y^i 存在着函数关系

$$x^i = x^i(y^1, y^2, y^3)$$

这一函数在所研究的定义域 D 内应是单值、连续可导的。在定义域内的每一点，雅可比行列式不为零，即

$$J = \frac{\partial(x^1, x^2, x^3)}{\partial(y^1, y^2, y^3)} \neq 0$$

（二）由以上一点引出，其反函数

$$y^i = y^i(x^1, x^2, x^3)$$

在定义域 D 内也应满足上述条件，且在每一点的行列式

$$J' = \frac{\partial(y^1, y^2, y^3)}{\partial(x^1, x^2, x^3)} \neq 0$$

两个行列式间存在下列关系

$$\frac{\partial(x^1, x^2, x^3)}{\partial(y^1, y^2, y^3)} \frac{\partial(y^1, y^2, y^3)}{\partial(x^1, x^2, x^3)} = 1$$

前面就是根据以上几点，先引进基本矢量和倒易基本矢量，然后引进度量张量与倒易度量张量的。

这一节要进一步讨论，假定存在两类曲线坐标 x^i 及 x^{*i}，它们存在下列关系式

$$x^i = x^i(y^1,\ y^2,\ y^3);\ x^{*i} = x^{*i}(y^1,\ y^2,\ y^3)$$

$$x^{*i} = x^{*i}(x^1,\ x^2,\ x^3)$$

$$x^i = x^i(x^{*1},\ x^{*2},\ x^{*3})$$

于是，由
$$\frac{\partial x^{*i}}{\partial x^j} = \frac{\partial x^{*i}}{\partial y^k}\frac{\partial y^k}{\partial x^j}$$

可得
$$\frac{\partial(x^{*1},\ x^{*2},\ x^{*3})}{\partial(x^1,\ x^2,\ x^3)} = \frac{\partial(x^{*1},\ x^{*2},\ x^{*3})}{\partial(y^1,\ y^2,\ y^3)}\frac{\partial(y^1,\ y^2,\ y^3)}{\partial(x^1,\ x^2,\ x^3)}$$

和以上讨论相类似，如果要实现 x^i 与 x^{*i} 间的相互交换，则要求上列雅可比行列式均不为零。

以此为基础，下面分别讨论 $\boldsymbol{e}_i$ 和 $\boldsymbol{e}^i$ 变换关系，并由此引出逆变变换和协变变换的概念。

1. $\boldsymbol{e}_i$ 和 $\boldsymbol{e}^i$ 的变换式

设老曲线坐标为 x^i，新曲线坐标为 x^{*i}，由于坐标位置矢量 $\boldsymbol{r}_P$ 为绝对矢量，即

$$\boldsymbol{r}_P = \boldsymbol{r}_P^*$$

再令 $\boldsymbol{e}_i^*$ 为 x^{*i} 下的基本矢量，则由基本矢量的定义，应有

$$\boldsymbol{e}_i^* = \frac{\partial \boldsymbol{r}_P^*}{\partial x^{*i}} = \frac{\partial \boldsymbol{r}_P}{\partial x^j}\frac{\partial x^j}{\partial x^{*i}} = \frac{\partial x^j}{\partial x^{*i}}\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_P}{\partial x^j}\right)$$

因已知 $\frac{\partial \boldsymbol{r}_P}{\partial x^j}$ 为老坐标系下的基本矢量 $\boldsymbol{e}_j$，故上式可改写成

及
$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{e}_i^* &= \frac{\partial x^j}{\partial x^{*i}}\boldsymbol{e}_j \\ \boldsymbol{e}_j &= \frac{\partial x^{*i}}{\partial x^j}\boldsymbol{e}_i^* \end{aligned}\right\} \tag{3-40}$$

对于 $\boldsymbol{e}^{*i}$，也可采用完全类似的方法，由于

$$e^{*i}=\nabla x^{*i}=\frac{\partial x^{*i}}{\partial y^k}u_k=\frac{\partial x^{*i}}{\partial x^j}\frac{\partial x^j}{\partial y^k}u_k$$

已知
$$\frac{\partial x^j}{\partial y^k}u_k=e^j$$

于是

$$\left.\begin{aligned} e^{*i}=\frac{\partial x^{*i}}{\partial x^j}e^j \\ e^j=\frac{\partial x^j}{\partial x^{*i}}e^{*i} \end{aligned}\right\} \tag{3-41}$$

2．矢量的协变变换和逆变变换、协变矢量和逆变矢量

由式(3-40)、(3-41)看出，这是两种完全不同的变换式。如果设想两种变换式中的偏导数可以“拆开”，则式(3-40)可写成

$$\partial x^j e_j=\partial x^{*i}e_i^*$$

这一等式左右两边新、老坐标是协调一致的。式(3-41)则不同，如将其“拆开”，则

$$\partial x^j e^{*i}=\partial x^{*i}e^j$$

上式表明，等式两边的新、老坐标不相一致。

前者称为协变变换，而后者则称为逆变变换。

为了加深对两种变换的理解，下面举数例说明之。

[例题 2] 作为特例，当 x^{*i}、x^i 为笛卡尔正交坐标 y^{*i}、y^i，则有

$$e^i=e_i=u_i;\ e^{*i}=e_i^*=u_i^*$$

而式(3-40)、(3-41)退化为

$$u_i^*=\frac{\partial y^j}{\partial y^{*i}}u_j;\ u_i^*=\frac{\partial y^{*i}}{\partial y^j}u_i$$

或
$$u_i^*=\alpha_{ij}u_j\quad\left(\text{此处}\ \frac{\partial y^{*i}}{\partial y^j}=\frac{\partial y^j}{\partial y^{*i}}\right)$$

上式可看成笛卡尔坐标系下的对应关系式。但由式 (1-43) 可以证明以上两式实际上是一个式子。从这一结果表明，对于笛卡尔坐标系，就不需要区别协变变换和逆变变换。

[例题 3] 已知柱坐标系的 e_i，试求出球坐标系的 e_i^*

由
$$e_i^* = \frac{\partial x^j}{\partial x^{*i}} e_j$$

可得
$$e_i^* = \frac{\partial x^1}{\partial x^{*i}} e_1 + \frac{\partial x^2}{\partial x^{*i}} e_2 + \frac{\partial x^3}{\partial x^{*i}} e_3$$

已知
$$x^1 = r,\ x^2 = \varphi,\ x^3 = z$$
$$x^{*1} = R,\ x^{*2} = \theta,\ x^{*3} = \varphi$$

以及
$$e_1 = \cos\varphi\, u_1 + \sin\varphi\, u_2,\ e_2 = r(-\sin\varphi\, u_1 + \cos\varphi\, u_2)$$
$$e_3 = u_3,\ r = R\sin\theta,\ z = R\cos\theta$$

则
$$e_R^* = \frac{\partial r}{\partial R}(\cos\varphi\, u_1 + \sin\varphi\, u_2) + \frac{\partial \varphi}{\partial R}(-r\sin\varphi\, u_1 + r\cos\varphi u_2) + \frac{\partial z}{\partial R} u_3$$

以及
$$e_\theta^* = \frac{\partial r}{\partial \theta} e_r + \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} e_\varphi + \frac{\partial z}{\partial \theta} e_z$$
$$e_\varphi^* = \frac{\partial r}{\partial \varphi} e_r + \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi} e_\varphi + \frac{\partial z}{\partial \varphi} e_z$$

但又由
$$\frac{\partial r}{\partial R} = \sin\theta;\ \frac{\partial \varphi}{\partial R} = 0;\ \frac{\partial z}{\partial R} = \cos\theta$$
$$\frac{\partial r}{\partial \theta} = R\cos\theta;\ \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = 0;\ \frac{\partial z}{\partial \theta} = -R\sin\theta$$
$$\frac{\partial r}{\partial \varphi} = 0;\ \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi} = 1;\ \frac{\partial z}{\partial \varphi} = 0$$

可得
$$e_R = \sin\theta\, e_r + \cos\theta e_z = \sin\theta(\cos\varphi\, u_1 + \sin\varphi\, u_2) + \cos\theta\, u_3$$
$$e_\theta = R(\cos\theta\, e_r - \sin\theta\, e_z) = R[\cos\theta(\cos\varphi\, u_1 + \sin\varphi\, u_2) - \sin\theta\, u_3]$$
$$e_\varphi = e_\varphi = r(-\sin\varphi\, u_1 + \cos\varphi\, u_2) = R\sin\theta(-\sin\varphi\, u_1 + \cos\varphi u_2)$$

这一结果和前面是一致的。对于倒易基本矢量间的关系，读者不妨自证。

根据以上讨论，可以求得在斜交曲线坐标系下，定义绝对矢量解析定义式如下：设 $\boldsymbol{A}$ 为绝对矢量，则
$$\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}$$

或
$$A^{*i} e_i^* = A^j e_j$$

已知
$$e_j = \frac{\partial x^{*i}}{\partial x^j} e_i^*$$

于是
$$e_i^*\left(A^{*i} - \frac{\partial x^{*i}}{\partial x^j} A^j\right) = 0$$

e_i^* 通常不为零，要保证上式成立，必须

同理可证

$$\left.\begin{aligned} A^{*i}&=\frac{\partial x^{*i}}{\partial x^j}A^j \\ A_i^*&=\frac{\partial x^j}{\partial x^{*i}}A_j \end{aligned}\right\} \tag{3-42}$$

与式(3-42)相对应，笛卡尔坐标系下，定义绝对矢量 $\boldsymbol{A}$ 的解析定义式应是

$$A_i^*=\frac{\partial y^{*i}}{\partial y^j}A_j,\ A_i^*=\frac{\partial y^j}{\partial y^{*i}}A_j$$

但因

$$\frac{\partial y^{*i}}{\partial y^j}=\frac{\partial y^j}{\partial y^{*i}}=\alpha_{ij}$$

所以上两式实际上退化为

$$A_i^*=\alpha_{ij}A_j$$

由此可见，式(3-42)可看成在斜交曲线坐标系下，定义矢量 $\boldsymbol{A}$ 为绝对矢量的解析定义式。

分析以上所得结果，发现式(3-42)中的第一分式是逆变变换，第二分式为协变变换。因此，如矢量 $\boldsymbol{A}$ 为一绝对矢量，则其逆变分量应是逆变变换，协变分量则应是协变变换。

为了说明问题，下面再举两个实例。

[例题4] 设流速 $\boldsymbol{v}$ 在笛卡尔坐标系下的分量为 $v_x=v$，$v_y=0$，$v_z=0$，试应用变换关系式求得柱坐标系下的分量 v_r，v_φ，v_z。

解：由协变变换关系式

$$v_i^*=\frac{\partial x^j}{\partial x^{*i}}v_j$$

令

$$v_1=v=v_x,\ v_2=0=v_y,\ v_3=0=v_z$$

$$x^1=x,\ x^2=y,\ x^3=z;\ x^{*1}=r,\ x^{*2}=\varphi,\ x^{*3}=z$$

$$v_1^*=v_r,\ v_2^*=v_\varphi,\ v_3^*=v_z;$$

则

$$v_r=\frac{\partial x}{\partial r}v_x+\frac{\partial y}{\partial r}v_y+\frac{\partial z}{\partial r}v_z$$

$$v_\varphi=\frac{\partial x}{\partial \varphi}v_x+\frac{\partial y}{\partial \varphi}v_y+\frac{\partial z}{\partial \varphi}v_z$$

$$v_z=\frac{\partial x}{\partial z}v_x+\frac{\partial y}{\partial z}v_y+\frac{\partial z}{\partial z}v_z$$

由 $\frac{\partial x}{\partial r}=\cos\varphi,\ \frac{\partial y}{\partial r}=\sin\varphi,\ \cdots\frac{\partial x}{\partial\varphi}=-r\sin\varphi,\ \frac{\partial y}{\partial\varphi}=r\cos\varphi$

可得 $v_r=v_x\cos\varphi=v\cos\varphi;\ v_\varphi=-v_x r\sin\varphi=-rv\sin\varphi$

$$v_z=0$$

又因 $v_r=\mathrm{v}_r,\ v_\varphi=r\mathrm{v}_\varphi$，于是最后可得

$$\mathrm{v}_r=v\cos\varphi;\ \mathrm{v}_\varphi=-v\sin\varphi$$

[例题5] 已知速度 v 在柱坐标系下的分量为 $\mathrm{v}_r=\frac{A}{r}$，$\mathrm{v}_\varphi=0$，$\mathrm{v}_z=0$，试求笛卡尔坐标系下的诸分量。

解：由

$$v_i=\frac{\partial x^{*j}}{\partial x^i}V_j^*$$

可得

$$v_x=\frac{\partial r}{\partial x}v_r+\frac{\partial\varphi}{\partial x}v_\varphi+\frac{\partial z}{\partial x}v_z$$

$$v_y=\frac{\partial r}{\partial y}v_r+\frac{\partial\varphi}{\partial y}v_\varphi+\frac{\partial z}{\partial y}v_z$$

$$v_z=\frac{\partial r}{\partial z}v_r+\frac{\partial\varphi}{\partial z}v_\varphi+\frac{\partial z}{\partial z}v_z$$

又因 $\frac{\partial r}{\partial x}=\cos\varphi,\ \frac{\partial r}{\partial y}=\sin\varphi,\ \cdots\mathrm{v}_r=\frac{A}{r},\ \mathrm{v}_\varphi=0$

于是 $v_x=\mathrm{v}_r\cos\varphi,\ v_y=\mathrm{v}_r\sin\varphi$

从以上讨论还可得出，对于基本矢量 e_i，它只能进行协变变换，这种只能作协变变换的矢量通称为协变矢量。至于 e^i 则相反，e^i 只能作逆变变换，这种只能作逆变变换的矢量通称为逆变矢量。

下面介绍工程上遇到的两种矢量 $\nabla\phi$ 及 $d\boldsymbol{r}_P$。

(1) 设 ϕ 为笛卡尔坐标系下某一绝对标量，现将其变换到曲线坐标系 $x^i=x^i(y^1,y^2,y^3)$ 并求其梯度。

既然 ϕ 是绝对标量，所以

$$\phi(y^1,y^2,y^3)=\phi^*(x^1,x^2,x^3)$$

根据梯度定义以及求偏导数的链法则，得

$$\nabla\phi=\frac{\partial\phi}{\partial y^i}\boldsymbol{u}_i=\frac{\partial\phi}{\partial x^j}\frac{\partial x^j}{\partial y^i}\boldsymbol{u}_i$$

已知 $\frac{\partial x^j}{\partial y^i}\boldsymbol{u}_i=\nabla x^j=\boldsymbol{e}^j$

因而以曲线坐标系 x^i 表示的 $\nabla\phi$ 为

$$\nabla\phi=\frac{\partial\phi}{\partial x^j}e^j \tag{8-43}$$

式中 $\nabla\phi$ 是以 e^j 表示的自然表达式，它的形式由梯度性质决定，$\frac{\partial\phi}{\partial x^j}$ 为 $\nabla\phi$ 的协变分量。

先证明 $\nabla\phi$ 为绝对矢量。由

$$\nabla\phi^*=e^{*i}\frac{\partial\phi^*}{\partial x^{*i}},\quad e^{*i}=\frac{\partial x^{*i}}{\partial x^j}e^j,\quad \phi=\phi^*$$

得
$$\nabla\phi^*=\frac{\partial x^{*i}}{\partial x^j}e^j\frac{\partial\phi}{\partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial x^{*i}}=\frac{\partial x^k}{\partial x^{*i}}\frac{\partial x^{*i}}{\partial x^j}\left(e^j\frac{\partial\varphi}{\partial x^k}\right)$$

已知
$$\frac{\partial x^k}{\partial x^{*i}}\frac{\partial x^{*i}}{\partial x^j}=\frac{\partial x^k}{\partial x^j}=\delta_j^k$$

于是
$$\nabla\phi^*=\delta_j^k\left(e^j\frac{\partial\phi}{\partial x^k}\right)=e^k\frac{\partial\phi}{\partial x^k}=\nabla\phi$$

上式表明 $\nabla\phi$ 为绝对矢量。根据这一结果，可证明 $\frac{\partial\phi}{\partial x^i}$ 应按协变进行变换，即

$$(\nabla\phi^*)_i=\frac{\partial\phi^*}{\partial x^{*i}}=\frac{\partial\phi}{\partial x^j}\frac{\partial x^j}{\partial x^{*i}}=\frac{\partial x^j}{\partial x^{*i}}(\nabla\phi)_j \tag{8-44}$$

即 $\frac{\partial\phi}{\partial x^i}$ 为协变变换。

(2) 位置矢量 r_P 的微分 dr_P

由 $r_P=r_P(x^1,\ x^2,\ x^3)$，得

$$dr_P=\frac{\partial r_P}{\partial x^i}dx^i=e_i\,dx^i \tag{8-45}$$

式(8-45)表明，dr_P 的逆变分量为 dx^i，这一分量是由位置矢量 r_P 微分的性质决定。

由 $x^{*i}=x^{*i}(x^1,\ x^2,\ x^3)$，可得

$$dx^{*i}=\frac{\partial x^{*i}}{\partial x^j}dx^j \tag{3-46}$$

式(3-46)表明，dx^{*i} 是逆变变换。

应用以上结果，还可证明 $d\boldsymbol{r}_P$ 为绝对矢量，由

$$d\boldsymbol{r}_P^*=\frac{\partial \boldsymbol{r}_P^*}{\partial x^{*i}}dx^{*i}=\boldsymbol{e}_i^*dx^{*i}$$

$$=\frac{\partial x^j}{\partial x^{*i}}\boldsymbol{e}_j\frac{\partial x^{*i}}{\partial x^k}dx^k=\frac{\partial x^j}{\partial x^{*i}}\frac{\partial x^{*i}}{\partial x^k}(\boldsymbol{e}_jdx^k)$$

因
$$\frac{\partial x^j}{\partial x^{*i}}\frac{\partial x^{*i}}{\partial x^k}=\delta_{jk}$$

所以
$$d\boldsymbol{r}_P^*=\delta_{jk}(\boldsymbol{e}_jdx^k)=\boldsymbol{e}_jdx^j=d\boldsymbol{r}_P$$

由此得证。

最后，再举几个实例作进一步说明。

[例题6] 如令老坐标系为笛尔卡坐标系，则任一矢量 $\boldsymbol{A}$ 的协变分量 A_i 及逆变分量 A^i 的变换式分别为

$$A_i=\frac{\partial y^j}{\partial x^i}a(j),\quad A^i=\frac{\partial x^i}{\partial y^j}a(j)$$

式中 $a(j)$是矢量 $\boldsymbol{A}$ 在笛卡尔坐标系下的投影分量(对于笛卡尔坐标系，无须区别协变分量和逆变分量)。由于 $\frac{\partial y^j}{\partial x^i}$、$\frac{\partial x^i}{\partial y^j}$ 分别为 $\boldsymbol{e}_i$ 及 $\boldsymbol{e}^i$ 的分量、因而

$$A_i=\frac{\partial y^j}{\partial x^i}a(j)=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}_i$$

$$A^i=\frac{\partial x^i}{\partial y^j}a(j)=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}^i$$

上式表明，两类变换式退化为矢量 $\boldsymbol{A}$ 的协变分量与逆变分量的定义式。

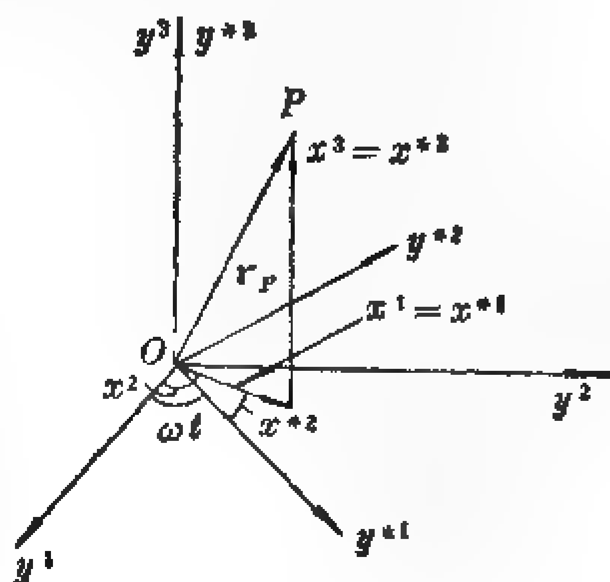


图 3-9

[例题7] 在叶轮机械气体动力学中曾广泛应用相对柱坐标系和绝对柱坐标系，这两类坐标系也可看作是确定同一空间的新、老坐标系。如图(3-9)所示，设(y^1,

y^2, y^3)及(y^{*1}, y^{*2}, y^{*3})分别表示绝对笛卡尔坐标和相对笛卡尔坐标; (x^1, x^2, x^3)及(x^{*1}, x^{*2}, x^{*3})为绝对柱坐标和相对柱坐标，则当转动轴取在 Oy^3 上，且 Oy^3 与 Oy^{*3} 重合一致时

$$x^1=x^{*1}=r,\quad x^2=x^{*2}+\omega t(\text{或}\ \theta=\varphi+\omega t)$$

$$x^3=x^{*3}=z$$

令绝对坐标系下的速度为 $\boldsymbol{C}$，其相应的逆变分量为C^i；相对坐标系下的速度为 $\boldsymbol{W}$，相应的逆变分量为W^i[1]，则

$$C^1=C^r=C_r,\quad C^2=C^\theta=\sqrt{g^{\theta\theta}}\ c_\theta=\frac{c_\theta}{r}$$

$$C^z=c^z,\ W^r=w_r,\quad W^\varphi=\sqrt{g^{\varphi\varphi}}\ w_\varphi=\frac{w_\varphi}{r}$$

$$W^z=w^z$$

于是，由逆变变换式，可得

$$W^i=\frac{\partial x^{*i}}{\partial x^j}C^j=\frac{\partial x^{*i}}{\partial x^1}C^1+\frac{\partial x^{*i}}{\partial x^2}C^2+\frac{\partial x^{*i}}{\partial x^3}C^3$$

或

$$W^r=\frac{\partial r}{\partial r}C^r+\frac{\partial r}{\partial \theta}C^\theta+\frac{\partial r}{\partial z}C^z$$

$$W^\varphi=\frac{\partial \varphi}{\partial r}C^r+\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}C^\theta+\frac{\partial \varphi}{\partial z}C^z$$

$$W^z=\frac{\partial z}{\partial r}C^r+\frac{\partial z}{\partial \theta}C^\theta+\frac{\partial z}{\partial z}C^z$$

但因 $\quad\dfrac{\partial r}{\partial r}=\dfrac{\partial z}{\partial z}=1,\ \dfrac{\partial r}{\partial \theta}=\dfrac{\partial z}{\partial r}=\dfrac{\partial z}{\partial \theta}=\dfrac{\partial \varphi}{\partial z}=\dfrac{\partial \varphi}{\partial r}=\dfrac{\partial r}{\partial z}=0$

而 $$\theta=\varphi+\omega t$$

所以 $$\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}=1-\omega\frac{dt}{d\theta}$$

应用 $c_\theta=r\dfrac{d\theta}{dt}$，可得

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}=1-\frac{\omega r}{c_\theta}=1-\frac{\omega}{C^\theta}$$

将此结果代入上式，即可得

$$W^r=C^r\quad\text{或}\quad w_r=c_r$$

$$W^\varphi=C^\theta-\omega\quad\text{或}\quad w_\varphi=c_\theta-\omega r$$

$$W^z=C^z\quad\text{或}\quad w_z=c_z$$

[例题6] 试证 A^iB_i 为不变量。其中 A^i、B_i 分别为绝对矢量 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 的逆变

[1] 在叶轮机械气体动力学中，习惯使用 C 作为绝对速度，以 W 作为相对速度

分量和协变分量。

证：由于 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为绝对矢量，因而

$$A^{*i}=\frac{\partial x^{*i}}{\partial x^{p}}A^{p},\quad B_{j}^{*}=\frac{\partial x^{q}}{\partial x^{*j}}B_{q}$$

于是
$$A^{*i}B_{j}^{*}=\frac{\partial x^{q}}{\partial x^{*j}}\frac{\partial x^{*i}}{\partial x^{p}}A^{p}B_{q}$$

令 $i=j$，则

$$A^{*i}B_{i}^{*}=\frac{\partial x^{q}}{\partial x^{*i}}\frac{\partial x^{*i}}{\partial x^{p}}A^{p}B_{q}$$

已知
$$\frac{\partial x^{q}}{\partial x^{*i}}\frac{\partial x^{*i}}{\partial x^{p}}=\delta_{p}^{q}$$

所以
$$A^{*i}B_{i}^{*}=\delta_{p}^{q}A^{p}B_{q}=A^{p}B_{p}$$

或
$$\boldsymbol{A}^{*}\cdot\boldsymbol{B}^{*}=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$$

由此得证。

第七节　二阶张量的变换和普遍定义式

上一节较详细地介绍了矢量(一阶张量)的变换，且引进了协变矢量和逆变矢量的定义。这一节将着重讨论二阶张量的变换问题，并从中得出普遍张量的解析定义式。

为了讨论方便，先从两个张量——度量张量和倒易度量张量开始。

(一)、度量张量元素的变换

设在老坐标系 x^{i} 下，其度量张量元素为 g_{ij}，在新坐标系 x^{*i} 下，其度量张量元素为 g_{ij}^{*}，由度量张量的定义式可知

$$g_{ij}^{*}=\boldsymbol{e}_{i}^{*}\cdot\boldsymbol{e}_{j}^{*}$$

由式(3-40)
$$\boldsymbol{e}_{i}^{*}=\frac{\partial x^{p}}{\partial x^{*i}}\boldsymbol{e}_{p},\quad \boldsymbol{e}_{j}^{*}=\frac{\partial x^{q}}{\partial x^{*j}}\boldsymbol{e}_{q}$$

得
$$g_{ij}^{*}=\frac{\partial x^{p}}{\partial x^{*i}}\frac{\partial x^{q}}{\partial x^{*j}}(\boldsymbol{e}_{p}\cdot\boldsymbol{e}_{q})$$

已知 $\boldsymbol{e}_{p}\cdot\boldsymbol{e}_{q}=g_{pq}$，于是

$$g^*_{ij}=\frac{\partial x^p}{\partial x^{*i}}\frac{\partial x^q}{\partial x^{*j}}g_{pq}{}^{(1)} \tag{3-47}$$

式(3-47)表明，g_{ij} 的变换式相当于协变变换。

前面曾经介绍过，g_{ij} 可看成是 e_i 的协变分量，e_i 是协变矢量，则其协变分量按协变形式变换也是很自然的。

对于正交曲线坐标系

$$g_{pq}=\begin{cases}0(p\neq q)\\ h_p^2(p=q)\end{cases}\qquad g^*_{ij}=\begin{cases}0(i\neq j)\\ (h_i^*)^2(i=j)\end{cases}$$

则式(3-47)化简为

$$g^*_{ij}=\left(\frac{\partial x^p}{\partial x^{*i}}\right)^2h_p^2=(h_i^*)^2 \tag{3-47$'$}$$

应用这一结果，通过柱坐标系的 h_p 可求得球坐标系的 h_i^* 如下：

$$g^*_{RR}=(h_R^*)^2=\left(\frac{\partial r}{\partial R}\right)^2h_r^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial R}\right)^2h_\varphi^2+\left(\frac{\partial z}{\partial R}\right)^2h_z^2$$

$$g^*_{\theta\theta}=(h_\theta^*)^2=\left(\frac{\partial r}{\partial\theta}\right)^2h_r^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right)^2h_\varphi^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\theta}\right)^2h_z^2$$

$$g^*_{\varphi\varphi}=(h_\varphi^*)^2=\left(\frac{\partial r}{\partial\varphi}\right)^2h_r^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\varphi}\right)^2h_\varphi^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2h_z^2$$

由于 $\quad\frac{\partial r}{\partial R}=\sin\theta,\ \frac{\partial\varphi}{\partial R}=\frac{\partial r}{\partial\varphi}=\frac{\partial z}{\partial\varphi}=\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}=0$

---

(1) 这一结论可用不变量概念直接导出如下：

对于 x^{*i}，其微分 dx^{*i} 应是

$$dx^{*i}=\frac{\partial x^{*i}}{\partial x^j}dx^j$$

设在新坐标下，空间任意两邻近点 P、Q 的微元距离为 ds^*。由于 ds^* 为不变量，即满足

$$ds^*=ds$$

因 $\quad(ds^*)^2=g^*_{ij}dx^{*i}dx^{*j},\ (ds)^2=g_{pq}dx^pdx^q$

所以 $\quad g^*_{ij}dx^{*i}dx^{*j}=g_{pq}dx^pdx^q$

或 $\quad\left(g^*_{ij}-\frac{\partial x^p}{\partial x^{*i}}\frac{\partial x^q}{\partial x^{*j}}g_{pq}\right)dx^{*i}dx^{*j}=0$

于是得 $\quad g^*_{ij}=\frac{\partial x^p}{\partial x^{*i}}\frac{\partial x^q}{\partial x^{*j}}g_{pq}$

$$\frac{\partial z}{\partial R}=\cos\theta,\ \frac{\partial r}{\partial \theta}=R\cos\theta,\ \frac{\partial z}{\partial \theta}=-R\sin\theta,\ \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi}=1$$

$$h_r^2=1,\ h_\varphi^2=r^2,\ h_z^2=1$$

代入之,得
$$g^*_{RR}=(h^*_R)^2=1,\ g^*_{\theta\theta}=(h^*_\theta)^2=R^2$$

$$g^*_{\varphi\varphi}=(h^*_\varphi)^2=R^2\sin^2\theta$$

这一结果和直接求出的结果完全一致。

(二) 倒易度量张量元素的变换

根据倒易度量张量的定义

$$g^{*ij}=e^{*i}\cdot e^{*j}$$

由式(3-41)可得

$$g^{*ij}=\frac{\partial x^{*i}}{\partial x^p}\frac{\partial x^{*j}}{\partial x^q}g^{pq} \tag{3-48}$$

式(3-48)是逆变变换式。由于 g^{ij} 可看成是 e^i 的逆变分量,因而 g^{*ij} 应按逆变形式变换。

(三) 克罗尼柯尔记号 δ_i^j 的变换

由 δ_i^j 的定义并结合度量张量的概念

$$\delta_i^j=e_i\cdot e^j$$

也可看成是混合度量张量,对于 δ_i^{*j} 可变换为

$$\delta_i^{*j}=e_i^*\cdot e^{*j}$$

或
$$\delta_i^{*j}=\frac{\partial x^p}{\partial x^{*i}}e_p\cdot\frac{\partial x^{*j}}{\partial x^q}e^q=\frac{\partial x^p}{\partial x^{*i}}\frac{\partial x^{*j}}{\partial x^q}(e_p\cdot e^q)$$

因 $e_p\cdot e^q=\delta_p^q$,所以

$$\delta_i^{*j}=\frac{\partial x^p}{\partial x^{*i}}\frac{\partial x^{*j}}{\partial x^q}\delta_p^q \tag{3-49}$$

式(3-49)表明,对于二阶混合张量,它既有协变变换,也有逆变变换。同理,亦可证明

$$\delta_j^{*i}=\frac{\partial x^q}{\partial x^{*j}}\frac{\partial x^{*i}}{\partial x^p}\delta_q^p \tag{3-49$'$}$$

由以上三种情况可见，g^{ij}、g_{ij} 及 δ_j^i 经变换后并不改变其度量张量(倒易及混合张量)的性质。对于这种不因坐标变换而改变性质的张量，称为各向同性张量。

作为特例，如令老坐标为笛卡尔坐标，则

$$\frac{\partial y^p}{\partial x^i}\frac{\partial y^q}{\partial x^j}\delta_{qp}=\frac{\partial y^p}{\partial x^i}\frac{\partial y^p}{\partial x^j}=g_{ij}$$

$$\frac{\partial x^i}{\partial y^p}\frac{\partial x^j}{\partial y^q}\delta_{qp}=\frac{\partial x^i}{\partial y^p}\frac{\partial x^j}{\partial y^p}=g^{ij}$$

这一结果再次表明，笛卡尔坐标系下的克罗尼柯尔记号和斜交曲线坐标系下的 g^{ij}、g_{ij} 相当。如采用协变变换，则得度量张量元素 g_{ij}，反之，则为倒易度量张量元素 g^{ij}。

至此，可确定二阶张量 Π 的协变变换、逆变变换及混合变换定义式如下：

1．协变变换

$$\Pi_{ij}^{*}=\frac{\partial x^p}{\partial x^{*i}}\frac{\partial x^q}{\partial x^{*j}}\Pi_{pq} \tag{3-50}$$

2．逆变变换

$$\Pi^{*ij}=\frac{\partial x^{*i}}{\partial x^p}\frac{\partial x^{*j}}{\partial x^q}\Pi^{pq} \tag{3-51}$$

3．混合变换

$$\left.\begin{aligned}\Pi_i^{*\cdot j}&=\frac{\partial x^p}{\partial x^{*i}}\frac{\partial x^{*j}}{\partial x^q}\Pi_p^{\cdot q}\\ \Pi_{\cdot j}^{*i}&=\frac{\partial x^{*i}}{\partial x^p}\frac{\partial x^q}{\partial x^{*j}}\Pi_{\cdot q}^{p}\end{aligned}\right\} \tag{3-52}$$

式中“$\cdot$”表示上下指标的顺序，一般情况下

$$\Pi_{\cdot i}^{j}\neq\Pi_{j}^{\cdot i}$$

与此有关知识将在后面介绍。

如果同样写出笛卡尔坐标系下的对应关系，则

$$\Pi^*_{ij}=\frac{\partial y^p}{\partial y^{*i}}\frac{\partial y^q}{\partial y^{*j}}\Pi_{pq};\quad \Pi^*_{ij}=\frac{\partial y^{*i}}{\partial y^p}\frac{\partial y^{*j}}{\partial y^q}\Pi_{pq}$$

$$\Pi^*_{ij}=\frac{\partial y^p}{\partial y^{*i}}\frac{\partial y^{*j}}{\partial y^q}\Pi_{pq};\quad \Pi^*_{ij}=\frac{\partial y^{*i}}{\partial y^p}\frac{\partial y^q}{\partial y^{*j}}\Pi_{pq}$$

但因
$$\alpha_{ip}=\frac{\partial y^p}{\partial y^{*i}}=\frac{\partial y^{*i}}{\partial y^p};\quad \alpha_{jq}=\frac{\partial y^q}{\partial y^{*j}}=\frac{\partial y^{*j}}{\partial y^q}$$

所以，以上四式归纳为

$$\Pi^*_{ij}=\alpha_{ip}\alpha_{jq}\Pi_{pq}$$

于是式(3-50)、(3-51)即为二阶普遍张量的定义式。

必须说明一点，二阶普遍张量的定义式还可推广到更高阶普遍张量。例如，对于三阶混合张量 Π^i_{jk}(二阶协变、一阶逆变)的定义式可写成

$$\Pi^{*i}_{jk}=\frac{\partial x^{*i}}{\partial x^p}\frac{\partial x^q}{\partial x^{*j}}\frac{\partial x^r}{\partial x^{*k}}\Pi^p_{qr}\tag{3-52)'$$

(四) 度量张量行列式 g 的变换式

设在 x^{*i} 下的度量张量行列式为 g^*，由定义式

$$\sqrt{g^*}=\begin{vmatrix}\frac{\partial y^1}{\partial x^{*1}} & \frac{\partial y^2}{\partial x^{*1}} & \frac{\partial y^3}{\partial x^{*1}}\\ \frac{\partial y^1}{\partial x^{*2}} & \frac{\partial y^2}{\partial x^{*2}} & \frac{\partial y^3}{\partial x^{*2}}\\ \frac{\partial y^1}{\partial x^{*3}} & \frac{\partial y^2}{\partial x^{*3}} & \frac{\partial y^3}{\partial x^{*3}}\end{vmatrix}$$

已知
$$\frac{\partial y^j}{\partial x^{*i}}=\frac{\partial y^j}{\partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial x^{*i}}$$

所以，可将上式改写成

$$\sqrt{g^*}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x^1}{\partial x^{*1}} & \frac{\partial x^2}{\partial x^{*1}} & \frac{\partial x^3}{\partial x^{*1}}\\ \frac{\partial x^1}{\partial x^{*2}} & \frac{\partial x^2}{\partial x^{*2}} & \frac{\partial x^3}{\partial x^{*2}}\\ \frac{\partial x^1}{\partial x^{*3}} & \frac{\partial x^2}{\partial x^{*3}} & \frac{\partial x^3}{\partial x^{*3}}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\frac{\partial y^1}{\partial x^1} & \frac{\partial y^2}{\partial x^1} & \frac{\partial y^3}{\partial x^1}\\ \frac{\partial y^1}{\partial x^2} & \frac{\partial y^2}{\partial x^2} & \frac{\partial y^3}{\partial x^2}\\ \frac{\partial y^1}{\partial x^3} & \frac{\partial y^2}{\partial x^3} & \frac{\partial y^3}{\partial x^3}\end{vmatrix}$$

或

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{g^*}&=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x^1}{\partial x^{*1}} & \dfrac{\partial x^2}{\partial x^{*1}} & \dfrac{\partial x^3}{\partial x^{*1}}\\ \dfrac{\partial x^1}{\partial x^{*2}} & \dfrac{\partial x^2}{\partial x^{*2}} & \dfrac{\partial x^3}{\partial x^{*2}}\\ \dfrac{\partial x^1}{\partial x^{*3}} & \dfrac{\partial x^2}{\partial x^{*3}} & \dfrac{\partial x^3}{\partial x^{*3}}\end{vmatrix}\sqrt{g}\\ \sqrt{g^*}&=\frac{\partial(x^1,\ x^2,\ x^3)}{\partial(x^{*1},\ x^{*2},\ x^{*3})}\sqrt{g}\end{aligned}\right\}\tag{3-53}$$

令

$$D=\frac{\partial(x^1,\ x^2,\ x^3)}{\partial(x^{*1},\ x^{*2},\ x^{*3})}$$

则

$$\sqrt{g^*}=D\sqrt{g},\ g^*=D^2g \tag{3-53$'$}$$

同理，由

$$\sqrt{g}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial y^1}{\partial x^1} & \dfrac{\partial y^2}{\partial x^1} & \dfrac{\partial y^3}{\partial x^1}\\ \dfrac{\partial y^1}{\partial x^2} & \dfrac{\partial y^2}{\partial x^2} & \dfrac{\partial y^3}{\partial x^2}\\ \dfrac{\partial y^1}{\partial x^3} & \dfrac{\partial y^2}{\partial x^3} & \dfrac{\partial y^3}{\partial x^3}\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x^{*1}}{\partial x^1} & \dfrac{\partial x^{*2}}{\partial x^1} & \dfrac{\partial x^{*3}}{\partial x^1}\\ \dfrac{\partial x^{*1}}{\partial x^2} & \dfrac{\partial x^{*2}}{\partial x^2} & \dfrac{\partial x^{*3}}{\partial x^2}\\ \dfrac{\partial x^{*1}}{\partial x^3} & \dfrac{\partial x^{*2}}{\partial x^3} & \dfrac{\partial x^{*3}}{\partial x^3}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\dfrac{\partial y^1}{\partial x^{*1}} & \dfrac{\partial y^2}{\partial x^{*1}} & \dfrac{\partial y^3}{\partial x^{*1}}\\ \dfrac{\partial y^1}{\partial x^{*2}} & \dfrac{\partial y^2}{\partial x^{*2}} & \dfrac{\partial y^3}{\partial x^{*2}}\\ \dfrac{\partial y^1}{\partial x^{*3}} & \dfrac{\partial y^2}{\partial x^{*3}} & \dfrac{\partial y^3}{\partial x^{*3}}\end{vmatrix}$$

如令

$$D^{-1}=\frac{\partial(x^{*1},\ x^{*2},\ x^{*3})}{\partial(x^1,\ x^2,\ x^3)}$$

则

$$\sqrt{g}=D^{-1}\sqrt{g^*}$$

于是

$$DD^{-1}=1$$

利用以上结果，还可证明微元体积 dV 为不变量，现证明如

下：

对于新曲线坐标系 dV^*，我们有

$$dV^*=\sqrt{g^*}\,dx^{*i}\,dx^{*j}\,dx^{*k}$$

由于 $\sqrt{g^*}=D\sqrt{g}$

$$D\,dx^{*i}\,dx^{*j}\,dx^{*k}=dx^p\,dx^q\,dx^r$$

于是

$$dV^*=\sqrt{g}\,dx^p\,dx^q\,dx^r=dV$$

由此得证。

下面仍以柱、球坐标为例，令

$$\sqrt{g}=r,\ x^1=r,\ x^2=\varphi,\ x^3=z$$

$$x^{*1}=R,\ x^{*2}=\theta,\ x^{*3}=\varphi$$

则

$$D=\begin{vmatrix}\sin\theta & 0 & \cos\theta\\ R\cos\theta & 0 & -R\sin\theta\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix}=R(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=R$$

于是

$$g^*=R^2r^2=R^4\sin^2\theta$$

利用这一结果可求得球坐标下，微元体积

$$dV=\sqrt{g}\,dx^1\,dx^2\,dx^3=R^2\sin\theta\,dR\,d\theta\,d\varphi$$

对于倒易度量张量行列式的变换式，可由读者自行求得，此处不再赘述。

[例题9] 试证叶轮机械气体动力学中绝对柱坐标系下的 g 和相对柱坐标系下的 g^* 相等。

证. 由两类坐标的关系式，$x^1=x^{*1}=r$，$x^2=\theta=x^{*2}+\omega t=\varphi+\omega t$，$x^3=x^{*3}=z$，所以 $\dfrac{\partial x^{*i}}{\partial x^j}=\delta^i_j$，$D=1$，于是

由式(3-53)′可得 $g=g^*$。

[例题10] 试证 $\epsilon_{ijk}(\epsilon^{ijk})$ 为三阶绝对张量

[证]

令

$$\epsilon^*_{ijk}=\sqrt{g^*}\,e^*_{ijk}\tag{a}$$

由

$$\sqrt{g^*}=D\sqrt{g} \tag{b}$$

以及

$$De^*_{ijk}=\frac{\partial x^p}{\partial x^{*i}}\frac{\partial x^q}{\partial x^{*j}}\frac{\partial x^r}{\partial x^{*k}}e_{pqr} \tag{c}$$

将式(b)、(c)同时代入式(a)，立即可得

$$\epsilon^*_{ijk}=\frac{\partial x^p}{\partial x^{*i}}\frac{\partial x^q}{\partial x^{*j}}\frac{\partial x^r}{\partial x^{*k}}\sqrt{g}\,e_{pqr}$$

又因

$$\epsilon_{pqr}=\sqrt{g}\,e_{pqr}$$

因而

$$\epsilon^*_{ijk}=\frac{\partial x^p}{\partial x^{*i}}\frac{\partial x^q}{\partial x^{*j}}\frac{\partial x^r}{\partial x^{*k}}\epsilon_{pqr}$$

由此得证。

第八节　矢量的张量分析

无论是笛卡尔正交坐标系还是笛卡尔斜交坐标系，其基本特点是，坐标系的局部标架，其方向不随空间位置而变。因此，单位矢量 $\boldsymbol{u}_i$ 对 y^i 的偏导数为零。

任意的斜交曲线坐标系则不同，由于 $\boldsymbol{e}_i$、$\boldsymbol{e}^i$($\boldsymbol{l}_i$、$\boldsymbol{l}^i$)都是 x^i 的函数，所以对矢量 $\boldsymbol{A}=A^i\boldsymbol{e}_i=A_i\boldsymbol{e}^i$ 求微分时，不仅要把 A^i、A_i 看成 x^i 的函数，也要将 $\boldsymbol{e}_i$、$\boldsymbol{e}^i$ 看作 x^i的函数。这样就使问题变得较为复杂，以致不能用普通的方法来分析，而必须采用张量分析的方法加以讨论。

这一节着重讨论矢量 $\boldsymbol{A}$ 在任意的斜交曲线坐标下的微分问题。

(一)、矢量 $\boldsymbol{A}$ 的绝对微分

在第一章中曾讨论过，矢量 $\boldsymbol{A}$ 在向基本矢量 $\boldsymbol{e}_i$ 分解，即

$$\boldsymbol{A}=A^i\boldsymbol{e}_i$$

因 A^i 和 $\boldsymbol{e}_i$ 都是 x^i 的函数，所以对于由 $\boldsymbol{A}$ 构成的矢量场 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(x^1,x^2,x^3)$，当求 $\boldsymbol{A}$ 的微分时，应为

$$d\boldsymbol{A}=dA^i\boldsymbol{e}_i+A^i d\boldsymbol{e}_i \tag{3-54}$$

式中 $d\boldsymbol{e}_i\neq 0$

$d\boldsymbol{A}$ 为矢量 $\boldsymbol{A}$ 的绝对微分。由式(3-54)可见，$d\boldsymbol{A}$ 由两项组成。第一项中的 dA^i 反映了矢量 $\boldsymbol{A}$ 的逆变分量随空间位置的变化，

$$dA^i=\frac{\partial A^i}{\partial x^k}dx^k \tag{3-55}$$

第二项中的 $d\boldsymbol{e}_i$ 表示基本矢量 $\boldsymbol{e}_i$ 随空间位置的变化，同样可表示成

$$d\boldsymbol{e}_i=\frac{\partial \boldsymbol{e}_i}{\partial x^k}dx^k \tag{3-56}$$

以式(3-55)、(3-56)代入式(3-54)，即得

$$d\boldsymbol{A}=\left(\frac{\partial A^i}{\partial x^k}\boldsymbol{e}_i+A^i\frac{\partial \boldsymbol{e}_i}{\partial x^k}\right)dx^k \tag{3-57}$$

令

$$\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial x^k}=\frac{\partial A^i}{\partial x^k}\boldsymbol{e}_i+A^i\frac{\partial \boldsymbol{e}_i}{\partial x^k} \tag{3-58}$$

则

$$d\boldsymbol{A}=\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial x^k}dx^k \tag{3-59}$$

式(3-58)中的 $\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial x^k}$ 为矢量 $\boldsymbol{A}$ 以逆变分量 A^i 表示的绝对协变导数。

除此以外，由于矢量 $\boldsymbol{A}$ 也可向倒易基本矢量方向 $\boldsymbol{e}^i$ 分解，即

$$\boldsymbol{A}=A_i\boldsymbol{e}^i$$

因而，重复上述步骤，可得

$$\left.\begin{aligned} d\boldsymbol{A}&=\left(\frac{\partial A_i}{\partial x^k}\boldsymbol{e}^i+A_i\frac{\partial \boldsymbol{e}^i}{\partial x^k}\right)dx^k \\ \text{或}\quad d\boldsymbol{A}&=\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial x^k}dx^k \end{aligned}\right\} \tag{3-60}$$

现称
$$\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial x^k}=\left(\frac{\partial A_i}{\partial x^k}\boldsymbol{e}^i+A_i\frac{\partial \boldsymbol{e}^i}{\partial x^k}\right)$$
为以 A_i 表示的绝对协变导数。

由以上推导得知，矢量 $\boldsymbol{A}$ 的绝对协变导数既可用逆变分量 A^i 表示，也可用协变分量 A_i 表示。

[例题 11] 应用以上概念，求得平面极坐标下，矢量 $\boldsymbol{A}$ 的绝对微分

解： 在平面极坐标系下$(r,\ \varphi)$，矢量 $\boldsymbol{A}$ 可写成
$$\boldsymbol{A}=A^r\boldsymbol{e}_r+A^\varphi\boldsymbol{e}_\varphi \tag{a}$$
其中
$$\boldsymbol{e}_r=\cos\varphi\,\boldsymbol{U}_1+\sin\varphi\,\boldsymbol{U}_2,\quad \boldsymbol{e}_\varphi=r(-\sin\varphi\,\boldsymbol{U}_1+\cos\varphi\,\boldsymbol{U}_2) \tag{b}$$
于是
$$d\boldsymbol{A}=\frac{\partial}{\partial x^k}(A^r\boldsymbol{e}_r+A^\varphi\boldsymbol{e}_\varphi)dx^k$$
展开之，得
$$\begin{aligned}d\boldsymbol{A}=&\left(\frac{\partial A^r}{\partial r}dr+\frac{\partial A^r}{\partial\varphi}d\varphi\right)\boldsymbol{e}_r+\left(\frac{\partial A^\varphi}{\partial r}dr+\frac{\partial A^\varphi}{\partial\varphi}d\varphi\right)\boldsymbol{e}_\varphi\\&+A^r\left(\frac{\partial \boldsymbol{e}_r}{\partial r}dr+\frac{\partial \boldsymbol{e}_r}{\partial\varphi}d\varphi\right)+A^\varphi\left(\frac{\partial \boldsymbol{e}_\varphi}{\partial r}dr+\frac{\partial \boldsymbol{e}_\varphi}{\partial\varphi}d\varphi\right)\end{aligned} \tag{c}$$
由式(b)可得
$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_r}{\partial r}=0,\quad \frac{\partial \boldsymbol{e}_r}{\partial\varphi}=\frac{1}{r}\boldsymbol{e}_\varphi,\quad \frac{\partial \boldsymbol{e}_\varphi}{\partial r}=\frac{\boldsymbol{e}_\varphi}{r},\quad \frac{\partial \boldsymbol{e}_\varphi}{\partial\varphi}=-r\boldsymbol{e}_r$$
代入式(c)，得
$$\begin{aligned}d\boldsymbol{A}=&\left(\frac{\partial A^r}{\partial r}dr+\frac{\partial A^r}{\partial\varphi}d\varphi-rA^\varphi d\varphi\right)\boldsymbol{e}_r\\&+\left(\frac{\partial A^\varphi}{\partial r}dr+\frac{\partial A^\varphi}{\partial\varphi}d\varphi+A^r\frac{d\varphi}{r}+\frac{A^\varphi}{r}dr\right)\boldsymbol{e}_\varphi\end{aligned}$$
令
$$A^r=a_r,\ A^\varphi=\frac{a_\varphi}{r},\ \boldsymbol{e}_r=\boldsymbol{l}_r,\ \boldsymbol{e}_\varphi=r\boldsymbol{l}_\varphi$$
则
$$\begin{aligned}d\boldsymbol{A}=&\left[\frac{\partial a_r}{\partial r}dr+\left(\frac{\partial a_r}{\partial\varphi}-a_\varphi\right)d\varphi\right]\boldsymbol{e}_r\\&+\left[\left(\frac{1}{r}\frac{\partial a_\varphi}{\partial r}\right)dr+\left(\frac{1}{r}\frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{a_r}{r}\right)d\varphi\right]\boldsymbol{e}_\varphi\end{aligned}$$
或
$$\begin{aligned}d\boldsymbol{A}=&\left[\frac{\partial a_r}{\partial r}dr+\left(\frac{\partial a_r}{\partial\varphi}-a_\varphi\right)d\varphi\right]\boldsymbol{l}_r\\&+\left[\left(\frac{\partial a_\varphi}{\partial r}\right)dr+\left(\frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi}+a_r\right)d\varphi\right]\boldsymbol{l}_\varphi\end{aligned}$$

上式即为极坐标系下，矢量 $\boldsymbol{A}$ 的绝对微分。

以上是将矢量 $\boldsymbol{A}$ 向基本矢量 $\boldsymbol{e}_i$ 方向分解得出的结果。

如果将矢量 $\boldsymbol{A}$ 向倒易基本矢量 $\boldsymbol{e}^i$ 方向分量，则通过类似讨论仍可得到相同结果，读者不妨自证。

[例题 12] 应用以上结果，证明平面极坐标系下加速度为

$$\boldsymbol{a}=\frac{D\boldsymbol{v}}{Dt}=\left(\frac{Dv_r}{Dt}-\frac{v_\varphi^2}{r}\right)\boldsymbol{i}_r+\left(\frac{Dv_\varphi}{Dt}+\frac{v_\varphi v_r}{r}\right)\boldsymbol{i}_\varphi$$

证：令 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{v}$

$d\boldsymbol{A}=d\boldsymbol{v}$，则有

$$d\boldsymbol{v}=\left[\frac{\partial v_r}{\partial r}dr+\left(\frac{\partial v_r}{\partial \varphi}-v_\varphi\right)d\varphi\right]\boldsymbol{i}_r+\left[\frac{\partial v_\varphi}{\partial r}dr+\left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}+v_r\right)d\varphi\right]\boldsymbol{i}_\varphi$$

$$\boldsymbol{a}=\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x^k}\left(\frac{Dx^k}{Dt}\right)$$

于是 $$\boldsymbol{a}=\frac{\partial v_r}{\partial t}\boldsymbol{i}_r+\frac{\partial v_\varphi}{\partial t}\boldsymbol{i}_\varphi+\left[\frac{\partial v_r}{\partial r}\frac{Dr}{Dt}+\frac{\partial v_r}{r\partial \varphi}\frac{rD\varphi}{Dt}-\frac{v_\varphi}{r}\frac{rD\varphi}{Dt}\right]\boldsymbol{i}_r$$
$$+\left[\frac{\partial v_\varphi}{\partial r}\frac{Dr}{Dt}+\frac{\partial v_\varphi}{r\partial \varphi}\frac{rD\varphi}{Dt}+\frac{v_r}{r}\frac{rD\varphi}{Dt}\right]\boldsymbol{i}_\varphi$$

由于 $$v_r=\frac{Dr}{Dt},\ v_\varphi=\frac{rD\varphi}{Dt}$$

所以 $$\boldsymbol{a}=\left(\frac{\partial v_r}{\partial t}+\frac{\partial v_r}{\partial r}v_r+\frac{\partial v_r}{r\partial \varphi}v_\varphi-\frac{v_\varphi^2}{r}\right)\boldsymbol{i}_r$$
$$+\left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial t}+\frac{\partial v_\varphi}{\partial r}v_r+\frac{\partial v_\varphi}{r\partial \varphi}v_\varphi+\frac{v_r v_\varphi}{r}\right)\boldsymbol{i}_\varphi$$

或 $$\boldsymbol{a}=\left(\frac{Dv_r}{Dt}-\frac{v_\varphi^2}{r}\right)\boldsymbol{i}_r+\left(\frac{Dv_\varphi}{Dt}+\frac{v_r v_\varphi}{r}\right)\boldsymbol{i}_\varphi$$

由此得证。

将式(3-57)、式(3-60)分别和 $\boldsymbol{e}^j$、$\boldsymbol{e}_j$ 作数性积，则得矢量 $\boldsymbol{A}$ 之绝对微分 $d\boldsymbol{A}$ 的逆变分量和协变分量如下：

$$(d\boldsymbol{A})^j=d\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}^j=\left[\frac{\partial A^i}{\partial x^k}(\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}^j)+A^i\left(\boldsymbol{e}^j\cdot\frac{\partial \boldsymbol{e}_i}{\partial x^k}\right)\right]dx^k$$

$$(d\boldsymbol{A})_j=d\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}_j=\left[\frac{\partial A_i}{\partial x^k}(\boldsymbol{e}^i\cdot\boldsymbol{e}_j)+A_i\left(\boldsymbol{e}_j\cdot\frac{\partial \boldsymbol{e}^i}{\partial x^k}\right)\right]dx^k$$

或

分别令

$$
\left.\begin{aligned}
dA\cdot e^j&=\left[\frac{\partial A^j}{\partial x^k}+A^i\left(e^j\cdot\frac{\partial e_i}{\partial x^k}\right)\right]dx^k\\
dA\cdot e_j&=\left[\frac{\partial A_j}{\partial x^k}+A_i\left(e_j\cdot\frac{\partial e^i}{\partial x^k}\right)\right]dx^k\\
\nabla_k A^j&=\frac{\partial A^j}{\partial x^k}+A^i\left(e^j\cdot\frac{\partial e_i}{\partial x^k}\right)\\
\nabla_k A_j&=\frac{\partial A_j}{\partial x^k}+A_i\left(e_j\cdot\frac{\partial e^i}{\partial x^k}\right)
\end{aligned}\right\}\tag{3-61}
$$

则

$$
\left.\begin{aligned}
&(dA)_j=(\nabla_k A_j)dx^k\\
&(dA)^j=(\nabla_k A^j)dx^k\\
&\frac{\partial A}{\partial x^k}=(\nabla_k A_j)e^j,\quad \frac{\partial A}{\partial x^k}=(\nabla_k A^j)e_j
\end{aligned}\right\}\tag{3-62}
$$

以平面极坐标下的速度 v 为例，

$$
\frac{\partial v}{\partial x^k}=\frac{\partial}{\partial x^k}(v^r e_r+v^\theta e_\theta);\quad \nabla_k v^j=\frac{\partial v}{\partial x^k}\cdot e^j
$$

得 $$\nabla_r v^r=\frac{\partial v^r}{\partial r};\ \nabla_r v^\theta=\frac{\partial v^\theta}{\partial r}+\frac{v^\theta}{r};\ \nabla_\theta v^r=\frac{\partial v^r}{\partial \theta}-rv^\theta;$$

$$
\nabla_\theta v^\theta=\frac{\partial v^\theta}{\partial\theta}+\frac{v^r}{r}
$$

$$
\begin{aligned}
dv&=\frac{\partial}{\partial x^k}(v^r e_r+v^\theta e_\theta)dx^k\\
&=(\nabla_r v^r)e_r dr+(\nabla_\theta v^r)e_r d\theta\\
&\quad+(\nabla_r v^\theta)e_\theta dr+(\nabla_\theta v^\theta)e_\theta d\theta
\end{aligned}
$$

或 $$dv=\left(\frac{\partial v^r}{\partial r}\right)e_r dr+\left(\frac{\partial v^r}{\partial\theta}-rv^\theta\right)e_r d\theta$$

$$
+\left(\frac{\partial v^\theta}{\partial r}+\frac{v^\theta}{r}\right)e_\theta dr+\left(\frac{\partial v^\theta}{\partial\theta}+\frac{v^r}{r}\right)e_\theta d\theta
$$

$\nabla_k A_j$、$\nabla_k A^j$ 为绝对协变导数的协变分量和逆变分量。

上面通过对矢量 A 的分析看到，只要知道 e_i、e^i，便可求得 $\frac{\partial e_i}{\partial x^k}$、$\frac{\partial e^i}{\partial x^k}$，并由上式求得矢量 A 的绝对微分 dA。但是，如果逐

项计算就显得繁琐。

从式(3-61)可见，与笛卡尔坐标系有区别的是，式中多出 $e_j\cdot\frac{\partial e^i}{\partial x^k}$ 及 $e^j\cdot\frac{\partial e_i}{\partial x^k}$ 两个因子，为此，就要着重对这两个因子作较详细的分析。

（二）克里斯朵夫第二类记号及其性质

由于
$$e_i=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^i}$$

所以
$$e^j\cdot\frac{\partial e_i}{\partial x^k}=e^j\cdot\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial x^i\partial x^k}$$

令
$$\Gamma^j_{ik}=e^j\cdot\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial x^i\partial x^k}$$

Γ^j_{ik} 称克里斯朵夫第二类记号。应用这一记号，可将式(3-61)中的第一式加以改写如下：

$$\nabla_k A^j=\left(\frac{\partial A^j}{\partial x^k}+A^i e^j\cdot\frac{\partial e_i}{\partial x^k}\right)=\left(\frac{\partial A^j}{\partial x^k}+A^i\Gamma^j_{ik}\right) \qquad (3-63)$$

又因
$$e_j\cdot e^i=0(i\neq j)$$

于是
$$e_i\cdot\frac{\partial e^j}{\partial x^k}=-e^j\cdot\frac{\partial e_i}{\partial x^k}$$

或
$$e_j\cdot\frac{\partial e^i}{\partial x^k}=-e^i\cdot\frac{\partial e_j}{\partial x^k}=-\Gamma^i_{jk}$$

则，式(3-61)中的第二分式可改写成

$$\nabla_k A_j=\frac{\partial A_j}{\partial x^k}+A_i e_j\cdot\frac{\partial e^i}{\partial x^k}=\frac{\partial A_j}{\partial x^k}-A_i\Gamma^i_{jk} \qquad (3-64)$$

克里斯朵夫第二类记号的性质：

1. 克里斯朵夫第二类记号的出现是由于基本矢量 e_i 及倒易基本矢量 e^i 是 x 的函数（即随空间位置而变）引起的，即

$$\frac{\partial e_i}{\partial x^k}\neq 0,\quad \frac{\partial e^i}{\partial x^k}\neq 0$$

对于笛卡尔正交坐标系或笛卡尔斜交坐标系，克里斯朵夫第二类

记号均为零。

2．克里斯朵夫第二类记号的表达式

由定义式

$$\Gamma_{ik}^{j}=\boldsymbol{e}^{j}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{e}_{i}}{\partial x^{k}}=\boldsymbol{e}^{j}\cdot\frac{\partial^{2}\boldsymbol{r}_{P}}{\partial x^{i}\partial x^{k}}$$

以及

$$\frac{\partial^{2}\boldsymbol{r}_{P}}{\partial x^{i}\partial x^{k}}=\frac{\partial^{2}(y^{n}\boldsymbol{u}_{n})}{\partial x^{i}\partial x^{k}}=\frac{\partial^{2}y^{n}}{\partial x^{i}\partial x^{k}}\boldsymbol{u}_{n}$$

$$\boldsymbol{e}^{j}=\frac{\partial x^{j}}{\partial y^{m}}\boldsymbol{u}_{m}$$

可得

$$\begin{aligned}\Gamma_{ik}^{j}&=\frac{\partial x^{j}}{\partial y^{m}}\boldsymbol{u}_{m}\cdot\frac{\partial^{2}y^{n}}{\partial x^{i}\partial x^{k}}\boldsymbol{u}_{n}\\&=\frac{\partial x^{j}}{\partial y^{m}}\frac{\partial^{2}y^{n}}{\partial x^{i}\partial x^{k}}(\boldsymbol{u}_{m}\cdot\boldsymbol{u}_{n})\\&=\frac{\partial x^{j}}{\partial y^{m}}\frac{\partial^{2}y^{n}}{\partial x^{i}\partial x^{k}}\delta_{mn}=\frac{\partial x^{j}}{\partial y^{m}}\frac{\partial^{2}y^{m}}{\partial x^{i}\partial x^{k}}\end{aligned}\tag{3-65}$$

由高阶偏导数与求导次序无关的性质，可证 $\Gamma_{ik}^{j}=\Gamma_{ki}^{j}$。即 Γ_{ik}^{j} 的下指标是对称的。

根据以上性质，Γ_{ik}^{j} 虽然有 27 个元素，但实际上只有 18 个元素是独立的，事实上

$$\Gamma_{12}^{1}=\Gamma_{21}^{1},\ \Gamma_{23}^{1}=\Gamma_{32}^{1},\ \Gamma_{13}^{1}=\Gamma_{31}^{1};\ \Gamma_{12}^{2}=\Gamma_{21}^{2},\ \Gamma_{32}^{2}=\Gamma_{23}^{2}$$

$$\Gamma_{13}^{2}=\Gamma_{31}^{2};\ \Gamma_{12}^{3}=\Gamma_{21}^{3},\ \Gamma_{23}^{3}=\Gamma_{32}^{3};\ \Gamma_{13}^{3}=\Gamma_{31}^{3}$$

因而，独立的元素只有

$$\Gamma_{11}^{1},\ \Gamma_{22}^{1},\ \Gamma_{33}^{1},\ \Gamma_{11}^{2},\ \Gamma_{22}^{2},\ \Gamma_{33}^{2},\ \Gamma_{11}^{3},\ \Gamma_{22}^{3},\ \Gamma_{33}^{3},$$

$$\Gamma_{12}^{1},\ \Gamma_{23}^{1},\ \Gamma_{12}^{2},\ \Gamma_{23}^{2},\ \Gamma_{31}^{2},\ \Gamma_{12}^{3},\ \Gamma_{23}^{3},\ \Gamma_{31}^{3}$$

3．克里斯朵夫第二类记号不是张量

克里斯朵夫第二类记号共有 27 个分量，但它不满足定义普遍张量的定义式，因而不是张量。

为证明这一点，先以柱坐标为例，求得柱坐标系下的克里斯朵

夫第二类记号的诸分量。

已知柱坐标系下的基本矢量 $\boldsymbol{e}_i$ 和倒易基本矢量 $\boldsymbol{e}^i$ 为

$$\boldsymbol{e}_r=\cos\varphi\,\boldsymbol{u}_1+\sin\varphi\,\boldsymbol{u}_2;\ \boldsymbol{e}_\varphi=r(-\sin\varphi\,\boldsymbol{u}_1+\cos\varphi\,\boldsymbol{u}_2)$$

$$\boldsymbol{e}_z=\boldsymbol{u}_3;\ \boldsymbol{e}^r=\cos\varphi\,\boldsymbol{u}_1+\sin\varphi\,\boldsymbol{u}_2;\ \boldsymbol{e}^\varphi=\frac{1}{r}(-\sin\varphi\,\boldsymbol{u}_1+\cos\varphi\,\boldsymbol{u}_2)$$

$$\boldsymbol{e}^z=\boldsymbol{u}_3$$

于是 $$\frac{\partial\boldsymbol{e}_r}{\partial r}=0;\ \frac{\partial\boldsymbol{e}_r}{\partial\varphi}=-\sin\varphi\,\boldsymbol{u}_1+\cos\varphi\,\boldsymbol{u}_2;\ \frac{\partial\boldsymbol{e}_r}{\partial z}=0$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{e}_\varphi}{\partial r}=-\sin\varphi\,\boldsymbol{u}_1+\cos\varphi\,\boldsymbol{u}_2;\ \frac{\partial\boldsymbol{e}_\varphi}{\partial\varphi}=-r(\cos\varphi\,\boldsymbol{u}_1+\sin\varphi\,\boldsymbol{u}_2)$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{e}_\varphi}{\partial z}=0;\ \frac{\partial\boldsymbol{e}_z}{\partial r}=0;\ \frac{\partial\boldsymbol{e}_z}{\partial\varphi}=0;\ \frac{\partial\boldsymbol{e}_z}{\partial z}=0$$

而克里斯朵夫第二类记号的诸元素可求得如下：

$$\Gamma^r_{rr}=\Gamma^r_{r\varphi}=\Gamma^r_{rz}=\Gamma^r_{zz}=\Gamma^\varphi_{rr}=\Gamma^\varphi_{\varphi\varphi}=\Gamma^\varphi_{rz}=\Gamma^\varphi_{zz}=\Gamma^z_{zz}=\cdots\cdots=0$$

而

$$\Gamma^\varphi_{\varphi r}=\Gamma^\varphi_{r\varphi}=\frac{1}{r};\ \Gamma^r_{\varphi\varphi}=-r, \tag{3-66}$$

所以 27 个元素中只有三个元素不为零

如令老坐标系为笛卡尔坐标 y^i，而新坐标为柱坐标，笛卡尔坐标下克里斯朵夫第二类记号的 27 个元素均为零，如果 Γ^l_{ik} 构成三阶张量，则由定义式，柱坐标下克里斯朵夫第二类记号的 27 个元素也应全部为零，但实际上并非如此，这正说明，克里斯朵夫第二类记号不满足三阶普遍张量的定义式。

以上较直观地论证了 Γ^l_{ik} 不是三阶张量，为了加深对 Γ^l_{ik} 的理解，下面再用解析的方法证明 Γ^l_{ik} 不是三阶普遍张量。

令新坐标系 x^{*i} 下，

$$\Gamma^{*l}_{ik}=\boldsymbol{e}^{*l}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{e}^*_i}{\partial x^{*k}} \tag{a}$$

根据矢量 $\boldsymbol{e}_i$、$\boldsymbol{e}^l$ 的变换，有

$$e^{*j}=\frac{\partial x^{*j}}{\partial x^p}e^p,\quad e_i^*=\frac{\partial x^q}{\partial x^{*i}}e_q \tag{b}$$

将式(b)代入式(a)，得

$$\Gamma^{*j}_{ik}=e^{*j}\cdot\frac{\partial e_i^*}{\partial x^{*k}}=\frac{\partial x^{*j}}{\partial x^p}e^p\cdot\frac{\partial}{\partial x^{*k}}\left(\frac{\partial x^q}{\partial x^{*i}}e_q\right)$$

$$=\frac{\partial x^{*j}}{\partial x^p}e^p\cdot\left[\frac{\partial x^q}{\partial x^{*i}}\frac{\partial x^r}{\partial x^{*k}}\frac{\partial e_q}{\partial x^r}+\frac{\partial^2 x^q}{\partial x^{*k}\partial x^{*i}}e_q\right]$$

由于

$$e^p\cdot\frac{\partial e_q}{\partial x^r}=\Gamma^p_{qr}、\ e^p\cdot e_q=\delta^p_q$$

所以

$$\Gamma^{*j}_{ik}=\frac{\partial x^{*j}}{\partial x^p}\frac{\partial x^q}{\partial x^{*i}}\frac{\partial x^r}{\partial x^{*k}}\Gamma^p_{qr}+\frac{\partial^2 x^p}{\partial x^{*i}\partial x^{*k}}\frac{\partial x^{*j}}{\partial x^p}$$

同理

$$\Gamma^{*i}_{jk}=\frac{\partial x^{*i}}{\partial x^p}\frac{\partial x^q}{\partial x^{*j}}\frac{\partial x^r}{\partial x^{*k}}\Gamma^p_{qr}+\frac{\partial^2 x^p}{\partial x^{*j}\partial x^{*k}}\frac{\partial x^{*i}}{\partial x^p} \tag{3-67}$$

式(3-67)和三阶普遍张量定义式相比多出第二项，因此 Γ^i_{jk} 不满足定义式，因而不是张量。

对于球坐标系下的克里斯朵夫第二类记号，有

$$\left.\begin{array}{l}\Gamma^{\theta}_{\theta R}=\Gamma^{\theta}_{R\theta}=\Gamma^{\varphi}_{\varphi R}=\Gamma^{\varphi}_{R\varphi}=\dfrac{1}{R};\ \Gamma^{R}_{\theta\theta}=-R\\ \Gamma^{R}_{\varphi\varphi}=-R\sin^2\theta;\ \Gamma^{\varphi}_{\varphi\theta}=\Gamma^{\varphi}_{\theta\varphi}=\cot\theta\sin\theta\\ \Gamma^{\theta}_{\varphi\varphi}=-\sin\theta\cos\theta\end{array}\right\} \tag{3-68}$$

而其余元素均为零。

(三) 克里斯朵夫第一类记号及其性质

从前面的讨论中看出，在张量分析中广泛采用度量张量 g_{ij}(g^{ij} 可通过 g_{ij} 表示)，这一节又引进了克里斯朵夫第二类记号，如能找到 g_{ij} 和 Γ^i_{jk} 之间的联系，则仍有希望通过 g_{ij} 来进行必要的分析。为此，先讨论一些预备知识，然后引出有关的表达式。令

$$e_{ik}=\frac{\partial^2 r_P}{\partial x^i\partial x^k}$$

如将 e_{ik} 向基本矢量 e_j 方向分解，则

$$e_{ik}=\left(e^j\cdot\frac{\partial^2 r_P}{\partial x^i\partial x^k}\right)e_j=\Gamma^j_{ik}e_j \tag{3-69}$$

由上式可见，克里斯朵夫第二类记号 Γ^j_{ik} 可看成 e_{ik} 的逆变分量。如果将 e_{ik} 向倒易基本矢量方向分解，则

$$e_{ik}=\left(e_j\cdot\frac{\partial^2 r_P}{\partial x^i\partial x^k}\right)e^j$$

我们称

$$\Gamma_{j,ik}=e_j\cdot\frac{\partial^2 r_P}{\partial x^i\partial x^k} \tag{a}$$

为克里斯朵夫第一类记号，于是

$$e_{ik}=\Gamma_{j,ik}e^j \tag{3-69$'$}$$

显然，$\Gamma_{j,ik}$ 是 e_{ik} 的协变分量。

由式(3-69)，如等式左右两边与 e_l 作数性积，则由定义式(a)，立即可得

$$\Gamma_{l,ik}=g_{jl}\Gamma^j_{ik}$$

同理，由式(3-69)′，如等式两边与 e^m 作数性积，则得

$$\Gamma^m_{ik}=g^{jm}\Gamma_{j,ik}=g^{lm}\Gamma_{l,ik}$$

于是，两类记号的转换关系可表示成

$$\left.\begin{aligned}\Gamma^m_{ik}&=g^{ml}\Gamma_{l,ik}\\ \Gamma^i_{jk}&=g^{il}\Gamma_{l,jk}\end{aligned}\right\} \tag{3-70}$$

$$\left.\begin{aligned}\Gamma_{l,ik}&=g_{lj}\Gamma^j_{ik}\\ \Gamma_{l,jk}&=g_{il}\Gamma^i_{jk}\end{aligned}\right\} \tag{3-71}$$

其实，以上结果如利用

$$e_i=g_{mi}e^m,\ e^i=g^{mi}e_m$$

也可直接求得，例如

$$\Gamma_{i,jk}=e_i\cdot\frac{\partial e_j}{\partial x^k}=g_{mi}\,e^m\cdot\frac{\partial e_j}{\partial x^k}=g_{mi}\Gamma^m_{jk}$$

式(3-70)、(3-71)给出了克里斯朵夫第一类记号和第二类记

号间相互转换的关系式，和以前讨论过的矢量之协变、逆变分量间转换相类似；g^{ij}、g_{ij} 起的作用和 δ_{ij} 相同。这也说明度量张量在张量分析中的重要作用。

还应着重说明一点，克里斯杂夫第一类记号也不是三阶张量，同样具有下列对称性质

$$\Gamma_{i,jk}=\Gamma_{i,kj}$$

(四) 关于 $\nabla_k A^j$、$\nabla_k A_j$ 的讨论

1. $\nabla_k A_j$ 为协变张量，而 $\nabla_k A^j$ 为混合张量

在讨论笛卡尔张量时，曾得出 $\dfrac{\partial A_i}{\partial y_j}$ 构成一二阶张量场；在斜交曲线坐标下，$\dfrac{\partial A_i}{\partial x^j}$ 则不可能构成一张量场。因为 $\dfrac{\partial A_i}{\partial x^j}$ 不是张量元素，现证明如下：

设矢量 $\boldsymbol{A}$ 为绝对矢量，因而

$$A_i^*=\frac{\partial x^p}{\partial x^{*i}}A_p$$

于是，在新坐标系 x^{*i} 下，

$$\begin{aligned}\frac{\partial A_i^*}{\partial x^{*j}}&=\frac{\partial}{\partial x^{*j}}\left(\frac{\partial x^p}{\partial x^{*i}}A_p\right)\\&=\frac{\partial A_p}{\partial x^{*j}}\frac{\partial x^p}{\partial x^{*i}}+A^p\frac{\partial^2 x^p}{\partial x^{*i}\partial x^{*j}}\end{aligned}$$

因
$$\frac{\partial A_p}{\partial x^{*j}}=\frac{\partial A_p}{\partial x^q}\frac{\partial x^q}{\partial x^{*j}}$$

所以
$$\frac{\partial A_i^*}{\partial x^{*j}}=\frac{\partial x^p}{\partial x^{*i}}\frac{\partial x^q}{\partial x^{*j}}\frac{\partial A_p}{\partial x^q}+A^p\frac{\partial^2 x^p}{\partial x^{*i}\partial x^{*j}}$$

上式表明，$\dfrac{\partial A_i}{\partial x^j}$ 不是二阶张量的元素。

但作为绝对协变导数的逆变分量则是二阶混合张量，由

$$\nabla_k A^{*j}=\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial x^{*k}}\cdot \boldsymbol{e}^{*j}$$

$$e^{*j}=\frac{\partial x^{*j}}{\partial x^q}e^q,\quad \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial x^{*k}}=\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial x^p}\frac{\partial x^p}{\partial x^{*k}}$$

可得
$$\nabla_k A^{*j}=\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial x^{*k}}\cdot e^{*j}=\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial x^p}\frac{\partial x^p}{\partial x^{*k}}\cdot\frac{\partial x^{*j}}{\partial x^q}e^q$$

因
$$\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial x^p}\cdot e^q=\nabla_p A^q$$

所以

$$\nabla_k A^{*j}=\frac{\partial x^p}{\partial x^{*k}}\frac{\partial x^{*j}}{\partial x^q}\nabla_p A^q \tag{3-72}$$

式(3-72)表明，$\nabla_k A^j$ 为二阶混合张量。同理，$\nabla_k A_j$ 为二阶协变张量，即

$$\nabla_k A_j^*=\frac{\partial x^q}{\partial x^{*j}}\frac{\partial x^p}{\partial x^{*k}}\nabla_p A_q \tag{3-73}$$

在斜交曲线坐标系下，只有应用 $\nabla_k A^j$、$\nabla_k A_j$ 才能表述矢量 $\boldsymbol{A}$ 在空间的分布强度，有关知识将在附录 I 中以平面极坐标为例加以说明。

2．$\nabla_k A^j$ 与 $\nabla_k A_j$ 间的关系

根据定义

$$\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial x^k}=(\nabla_k A_i)e^i,\quad \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial x^k}=(\nabla_k A^j)e_j$$

因而
$$\nabla_k A_i=e_i\cdot\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial x^k}=(\nabla_k A^j)(e_i\cdot e_j)$$

或

同理
$$\left.\begin{aligned}\nabla_k A_i&=g_{ij}(\nabla_k A^j)\\ \nabla_k A^i&=g^{ij}(\nabla_k A_j)\end{aligned}\right\} \tag{3-74}$$

3．如果是标量函数 ϕ，则 $\nabla_k\phi=\frac{\partial\phi}{\partial x^k}$，或 $\nabla_k\phi$ 就是 $\nabla\phi$ 的协变分量。

对于笛卡尔坐标系，矢量 $\boldsymbol{A}$ 可表示成

$$\boldsymbol{A}=A(j)\boldsymbol{u}_j$$

式中 $A(j)$ 为矢量 $\boldsymbol{A}$ 的投影分量，由于 $\boldsymbol{u}_j$ 不随空间位置变化，所以

$$\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial y^k}\cdot\boldsymbol{u}_j=\frac{\partial A(j)}{\partial y^k}$$

上式表明，矢量 $\boldsymbol{A}$ 在笛卡尔坐标系下对 y^k 的偏导数，其在 $\boldsymbol{u}_j$ 方向的投影分量就等于矢量 $\boldsymbol{A}$ 在 $\boldsymbol{u}_j$ 方向投影对 y^k 的偏导数。

显然，这一结论只适用于笛卡尔坐标系。

(五) 克里斯朵夫记号与度量张量间的关系

由 g_{ij} 的定义

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}=\frac{\partial}{\partial x^k}(\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j)=\boldsymbol{e}_j\cdot\frac{\partial \boldsymbol{e}_i}{\partial x^k}+\boldsymbol{e}_i\cdot\frac{\partial \boldsymbol{e}_j}{\partial x^k}$$

已知
$$\Gamma_{j,ik}=\boldsymbol{e}_j\cdot\frac{\partial \boldsymbol{e}_i}{\partial x^k},\quad \Gamma_{i,jk}=\boldsymbol{e}_i\cdot\frac{\partial \boldsymbol{e}_j}{\partial x^k}$$

所以

同理得
$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}&=\Gamma_{j,ik}+\Gamma_{i,jk}\\ \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j}&=\Gamma_{i,kj}+\Gamma_{k,ij}\\ \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}&=\Gamma_{j,ki}+\Gamma_{k,ji}\end{aligned}\right\}\tag{3-75}$$

由于后两个下标的对称性，即

$$\Gamma_{j,ik}=\Gamma_{j,ki},\ \Gamma_{i,jk}=\Gamma_{i,kj},\ \Gamma_{k,ij}=\Gamma_{k,ji}$$

式(3-75)又可改写为

$$\left.\begin{aligned}\Gamma_{k,ij}+\Gamma_{i,jk}&=\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j}\\ \Gamma_{i,jk}+\Gamma_{j,ki}&=\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\\ \Gamma_{j,ki}+\Gamma_{k,ij}&=\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}\end{aligned}\right\}\tag{3-75$'$}$$

这一方程组可用初等数学方法解出，即

$$\left.\begin{aligned}\Gamma_{k,ij}&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j}+\frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right)\\ \Gamma_{i,jk}&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}+\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}-\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}\right)\\ \Gamma_{j,ki}&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}+\frac{\partial g_{ji}}{\partial x^k}-\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j}\right)\end{aligned}\right\}\tag{3-76}$$

$$\left.\begin{aligned}\Gamma^m_{ij}&=\frac{1}{2}g^{mk}\left(\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j}+\frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right)\\ \Gamma^m_{jk}&=\frac{1}{2}g^{mi}\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}+\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}-\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}\right)\\ \Gamma^m_{ki}&=\frac{1}{2}g^{mj}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}+\frac{\partial g_{ji}}{\partial x^k}-\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j}\right)\end{aligned}\right\}\tag{3-77}$$

以上初步求得了克里斯朵夫记号与度量张量元素间的关系。如果是正交曲线坐标系，则由于 $g_{ij}=0(i\neq j)$ 而 $g_{ii}=h_i^2$，两类克里斯朵夫中只有两个下标相同时不为零，其余均为零，例如

$$\Gamma_{3,21}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{31}}{\partial x^2}+\frac{\partial g_{32}}{\partial x^1}-\frac{\partial g_{12}}{\partial x^3}\right)=0$$

$$\Gamma_{1,12}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2}+\frac{\partial g_{12}}{\partial x^1}-\frac{\partial g_{12}}{\partial x^1}\right)=\frac{1}{2}\ \frac{\partial}{\partial x^2}(h_1^2)$$

$$\Gamma_{1,22}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{12}}{\partial x^2}+\frac{\partial g_{12}}{\partial x^1}-\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}\right)=-h_2\frac{\partial h_2}{\partial x^1}$$

可将以上结果归纳为

$$\Gamma_{k,ij}=-h_j\frac{\partial h_j}{\partial x^k}(i=j\neq k)$$

$$\Gamma_{k,kj}=h_k\frac{\partial h_k}{\partial x^j}(i=k\neq j)$$

$$\Gamma_{k,kk}=h_k\frac{\partial h_k}{\partial x^k}(i=j=k)$$

$$\Gamma_{k,ij}=0(i\neq j\neq k)$$

关于克里斯朵夫第一类记号，当 $m\neq k$ 时，$g^{mk}\neq 0$；而 $m=k$ 时，

$g^{mk}=g^{kk}=\frac{1}{h_k^2}$，则

$$\Gamma^k_{jj}=-g^{kk}\left(h_j\frac{\partial h_j}{\partial x^k}\right)=-\frac{h_j}{h_k^2}\frac{\partial h_j}{\partial x^k}$$

$$\Gamma^k_{kj}=g^{kk}\Gamma_{k,kj}=\frac{1}{h_k^2}\left(h_k\frac{\partial h_k}{\partial x^j}\right)=\frac{1}{h_k}\frac{\partial h_k}{\partial x^j}$$

$$\Gamma^k_{kk}=g^{kk}\Gamma_{k,kk}=\frac{1}{h_k^2}\left(h_k\frac{\partial h_k}{\partial x^k}\right)=\frac{1}{h_k}\frac{\partial h_k}{\partial x^k}$$

$$\Gamma^i_{jk}=0(i\neq j\neq k)$$

如果将 Γ^k_{kk} 看成 Γ^k_{kj} 的特例，还可简写成

$$\Gamma^i_{jk}=0(i\neq j\neq k)$$

$$\Gamma^i_{ij}=\frac{1}{h_i}\frac{\partial h_i}{\partial x^j}=\frac{\partial\ln h_i}{\partial x^j}=\frac{1}{2}\frac{\partial(\ln g_{ii})}{\partial x^j}=\frac{1}{2g_{ii}}\frac{\partial g_{ii}}{\partial x^j}$$

$$\Gamma^j_{ii}=-\frac{h_i}{h_j^2}\frac{\partial h_i}{\partial x^j}=\frac{-1}{2g_{jj}}\frac{\partial g_{ii}}{\partial x^j} \tag{3-78}$$

应用式(3-78)，可较方便地求得柱坐标系、球坐标系下的两类克里斯朵夫记号。例如，对于柱坐标系

$$\Gamma^r_{\varphi\varphi}=-\frac{1}{2g_{rr}}\frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial r}=-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2)=-r$$

$$\Gamma^\varphi_{\varphi r}=\Gamma^\varphi_{r\varphi}=\frac{1}{2g_{\varphi\varphi}}\frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial r}=\frac{1}{2r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2)=\frac{1}{r}$$

对于球坐标，则

$$\Gamma^R_{\theta\theta}=-\frac{1}{2g_{RR}}\frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial R}=-\frac{1}{2}\frac{\partial R^2}{\partial R}=-R$$

$$\Gamma^\theta_{\theta R}=\Gamma^\theta_{R\theta}=\frac{1}{2g_{\theta\theta}}\frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial R}=\frac{1}{2R^2}\frac{\partial}{\partial R}(R^2)=\frac{1}{R}$$

$$\Gamma^R_{\varphi\varphi}=-\frac{1}{2g_{RR}}\frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial R}=-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial R}(R^2\sin^2\theta)=-R\sin^2\theta$$

$$\Gamma^\theta_{\varphi\varphi}=-\frac{1}{2g_{\theta\theta}}\frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial\theta}=-\frac{1}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(R^2\sin^2\theta)=-\sin\theta\cos\theta$$

$$\Gamma^{\varphi}_{\theta\varphi}=\Gamma^{\varphi}_{\varphi\theta}=\frac{1}{2g_{\varphi\varphi}}\frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial\theta}=\frac{1}{2R^2\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(R^2\sin^2\theta)=\sin\theta\cot\theta$$

以上讨论了度量张量元素对坐标之偏导数与克里斯朵夫记号间的关系。对于倒易度量张量 g^{ij} 对坐标的偏导数也可类似地求得如下：

由
$$g^{ij}=e^i\cdot e^j$$

得
$$\frac{\partial g^{ij}}{\partial x^k}=e^i\cdot\frac{\partial e^j}{\partial x^k}+e^j\cdot\frac{\partial e^i}{\partial x^k}$$

但
$$\frac{\partial e^j}{\partial x^k}=\left(e_h\cdot\frac{\partial e^j}{\partial x^k}\right)e^h;\quad \frac{\partial e^i}{\partial x^k}=\left(e_h\cdot\frac{\partial e^i}{\partial x^k}\right)e^h$$

于是
$$\frac{\partial g^{ij}}{\partial x^k}=g^{ih}(-\Gamma^j_{hk})+g^{hj}(-\Gamma^i_{hk})$$

或

同理，有
$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial g^{ij}}{\partial x^k}&=-[g^{ih}\Gamma^j_{hk}+g^{hj}\Gamma^i_{hk}]\\ \frac{\partial g^{jk}}{\partial x^i}&=-[g^{jh}\Gamma^k_{hi}+g^{hk}\Gamma^j_{hi}]\\ \frac{\partial g^{ki}}{\partial x^j}&=-[g^{kh}\Gamma^i_{hj}+g^{hi}\Gamma^k_{hj}]\end{aligned}\right\}\qquad(3\text{-}78)'$$

以上着重讨论了克里斯朵夫记号与度量张量元素之间的关系，应用以上结果可进一步求得克里斯朵夫记号与度量张量行列式 g 的关系式如下：

由
$$g=\begin{vmatrix}g_{11}&g_{12}&g_{13}\\g_{21}&g_{22}&g_{23}\\g_{31}&g_{32}&g_{33}\end{vmatrix}$$

可得
$$\frac{\partial g}{\partial x^k}=\begin{vmatrix}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^k}&\frac{\partial g_{12}}{\partial x^k}&\frac{\partial g_{13}}{\partial x^k}\\g_{21}&g_{22}&g_{23}\\g_{31}&g_{32}&g_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}g_{11}&g_{12}&g_{13}\\\frac{\partial g_{21}}{\partial x^k}&\frac{\partial g_{22}}{\partial x^k}&\frac{\partial g_{23}}{\partial x^k}\\g_{31}&g_{32}&g_{33}\end{vmatrix}$$

$$
+\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ \frac{\partial g_{31}}{\partial x^k} & \frac{\partial g_{32}}{\partial x^k} & \frac{\partial g_{33}}{\partial x^k} \end{vmatrix}
$$

$$
=\frac{\partial g_{1j}}{\partial x^k}G_{1j}+\frac{\partial g_{2j}}{\partial x^k}G_{2j}+\frac{\partial g_{3j}}{\partial x^k}G_{3j}
$$

$$
=\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}G_{ij}
$$

即
$$
\frac{\partial g}{\partial x^k}=\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}G_{ij}
$$

但已知
$$
G_{ij}=gg^{ij};\ \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}=g_{mj}\Gamma^m_{ik}+g_{mi}\Gamma^m_{jk}
$$

代入上式，即得

$$
\frac{\partial g}{\partial x^k}=gg^{ij}(g_{mj}\Gamma^m_{ik}+g_{mi}\Gamma^m_{jk})
$$

或
$$
\frac{\partial g}{\partial x^k}=g(g^{ij}g_{mi}\Gamma^m_{kj}+g^{ij}g_{mj}\Gamma^m_{ki})
$$

根据式(3-33)

$$
g^{ij}g_{mi}=\delta^j_m,\ g^{ij}g_{mj}=\delta^i_m
$$

于是
$$
\frac{\partial g}{\partial x^k}=g(\delta^j_m\Gamma^m_{kj}+\delta^i_m\Gamma^m_{ki})
$$

对上式作指标缩减运算，则得

$$
\frac{\partial g}{\partial x^k}=g(\Gamma^j_{kj}+\Gamma^i_{ki})
$$

式中"i"及"j"均为求和指标，而由求和指标的性质，可令$i=j=p$，因此得

$$
\frac{\partial g}{\partial x^k}=g(\Gamma^p_{kp}+\Gamma^p_{kp})=2g\Gamma^p_{kp}
$$

或

$$\Gamma^{p}_{kp}=\frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial x^{k}}=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^{k}}\sqrt{g}\ ^{(1)} \qquad (3\text{-}79)$$

式(3-79)提供了克里斯朵夫记号与度量张量行列式 g 之间的相互关系，它对以后的讨论起着重要的作用。

第九节　斜交曲线坐标系下，标量 ϕ 的梯度、矢量 $\boldsymbol{A}$ 的散度和旋度

对于标量场，可用标量的梯度表示其分布强度；对于矢量场，则可用矢量的散度及旋度表示。矢量的散度可看成矢量的数性导数，而旋度则可看成矢量的矢性导数。

（一）标量 ϕ 的梯度

某标量场的标量 ϕ，它既是 x^i 的函数，也是 y^j 的函数，因而

$$d\phi=\frac{\partial\phi}{\partial x^{i}}dx^{i}=\frac{\partial\phi}{\partial y^{j}}\frac{\partial y^{j}}{\partial x^{i}}dx^{i}$$

已知 $\frac{\partial\phi}{\partial y^{j}}$ 为 ϕ 在笛卡尔坐标系下 $\nabla\phi$ 的第 j 个分量；$\frac{\partial y^{j}}{\partial x^{i}}$ 为 $\boldsymbol{e}_i$ 的第 j 个分量，于是有

$$d\phi=\frac{\partial\phi}{\partial x^{i}}dx^{i}=(\nabla\phi\cdot\boldsymbol{e}_{i})dx^{i}$$

---

(1) 其实，此式也可直接利用度量张量行列式 g 的定义式对坐标的偏导数求得如下：

由 $\sqrt{g}=\boldsymbol{e}_1\cdot[\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3]$，可得

$$\begin{aligned}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x^{k}}&=\frac{\partial}{\partial x^{k}}[\boldsymbol{e}_1\cdot(\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3)]\\&=\frac{\partial\boldsymbol{e}_1}{\partial x^{k}}\cdot(\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3)+\boldsymbol{e}_1\cdot\left(\frac{\partial\boldsymbol{e}_2}{\partial x^{k}}\times\boldsymbol{e}_3\right)+\boldsymbol{e}_1\cdot\left(\boldsymbol{e}_2\times\frac{\partial\boldsymbol{e}_3}{\partial x^{k}}\right)\\&=\Gamma^{h}_{1k}[\boldsymbol{e}_h\cdot(\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3)]+\Gamma^{h}_{2k}[\boldsymbol{e}_1\cdot(\boldsymbol{e}_h\times\boldsymbol{e}_3)]\\&\quad+\Gamma^{h}_{3k}[\boldsymbol{e}_1\cdot(\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_h)]\\&=(\Gamma^{1}_{1k}+\Gamma^{2}_{2k}+\Gamma^{3}_{3k})[\boldsymbol{e}_1\cdot(\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3)]\\&=(\Gamma^{1}_{1k}+\Gamma^{2}_{2k}+\Gamma^{3}_{3k})\sqrt{g}=\Gamma^{p}_{pk}\sqrt{g}\end{aligned}$$

于是

$$\Gamma^{p}_{pk}=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x^{k}}$$

根据矢量之协变分量的定义，$\nabla\phi\cdot e_i$ 是 $\nabla\phi$ 在斜交曲线坐标系下的协变分量，由上式可得

$$\frac{\partial\phi}{\partial x^i}=\nabla\phi\cdot e_i \tag{3-80}$$

式(3-80)表明，在斜交曲线坐标系下，$\nabla\phi$ 的协变分量为 $\partial\phi/\partial x^i$。

如果将 $\nabla\phi$ 向倒易基本矢量分解，则

$$\left.\begin{aligned}
&\nabla\phi=\frac{\partial\phi}{\partial x^i}e^i=e^i\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)\phi\\
&\text{由于}\quad e^i=g^{ij}e_j\\
&\text{所以,}\nabla\phi\text{又可写成}\quad \nabla\phi=\left(g^{ij}e_j\frac{\partial}{\partial x^i}\right)\phi
\end{aligned}\right\} \tag{3-81}$$

在实际使用时，常以曲线坐标系单位矢量 $\boldsymbol{l}_i$ 表示。由

$$e_j=\sqrt{g_{jj}}\,\boldsymbol{l}_j$$

可得

$$\nabla\phi=\left(\sqrt{g_{jj}}\,g^{ij}\,\boldsymbol{l}_j\frac{\partial}{\partial x^i}\right)\phi \tag{3-81$'$}$$

式(3-80)、(3-81)都是 $\nabla\phi$ 在斜交曲线坐标系下的表达式。

如果是正交曲线坐标系，则 $g^{ii}=\dfrac{1}{g_{ii}}$、$g^{ij}=0(i\neq j)$，

于是
$$\nabla\phi=\frac{1}{\sqrt{g_{jj}}}\boldsymbol{l}_j\frac{\partial\phi}{\partial x^j}$$

或

$$\nabla\phi=\frac{\boldsymbol{l}_1}{\sqrt{g_{11}}}\frac{\partial\phi}{\partial x^1}+\frac{\boldsymbol{l}_2}{\sqrt{g_{22}}}\frac{\partial\phi}{\partial x^2}+\frac{\boldsymbol{l}_3}{\sqrt{g_{33}}}\frac{\partial\phi}{\partial x^3} \tag{3-82}$$

对于柱坐标，由于 $g_{11}=1,\ g_{22}=r^2,\ g_{33}=1$

$$\boldsymbol{l}_1=\boldsymbol{l}_r,\ \boldsymbol{l}_2=\boldsymbol{l}_\varphi,\ \boldsymbol{l}_3=\boldsymbol{l}_z=\boldsymbol{u}_3$$

所以
$$\nabla\phi=\frac{\partial\phi}{\partial r}\boldsymbol{l}_r+\frac{\partial\phi}{r\partial\varphi}\boldsymbol{l}_\varphi+\frac{\partial\phi}{\partial z}\boldsymbol{l}_z$$

至于球坐标，则由于

$$g_{11}=1,\ g_{22}=R^2,\ g_{33}=R^2\sin^2\theta$$

$$\boldsymbol{l}_1=\boldsymbol{l}_R,\ \boldsymbol{l}_2=\boldsymbol{l}_\theta,\ \boldsymbol{l}_3=\boldsymbol{l}_\varphi$$

因此
$$\nabla\phi=\frac{\partial\phi}{\partial R}\boldsymbol{l}_R+\frac{\partial\phi}{R\partial\theta}\boldsymbol{l}_\theta+\frac{1}{R\sin\varphi}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\boldsymbol{l}_\varphi$$

由梯度表达式

$$\nabla\phi=e^i\frac{\partial\phi}{\partial x^i}$$

可得哈密尔顿算子

$$\nabla=\boldsymbol{e}^i\frac{\partial}{\partial x^i}=g^{ij}\boldsymbol{e}_j\frac{\partial}{\partial x^i}\tag{3-83}$$

哈密尔顿算子∇有两种功能：一是可作为矢量进行运算；二是作为微分算子，对其后面的函数(标量或矢量函数等)进行微分运算。既然∇是矢量，则由式(3-83)，其协变分量和逆变分量分别为

$$\left.\begin{aligned}\nabla_i&=\frac{\partial}{\partial x^i}\\ \nabla^i&=g^{ij}\frac{\partial}{\partial x^j}\end{aligned}\right\}\tag{3-83$'$}$$

应用以上结果，可得流体力学中常用的算符$\boldsymbol{v}\cdot\nabla$如下：

由
$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{e}_iV^i;\ \nabla=\boldsymbol{e}^j\frac{\partial}{\partial x^j},\text{得}$$

$$\boldsymbol{v}\cdot\nabla=\boldsymbol{e}_iV^i\cdot\boldsymbol{e}^j\frac{\partial}{\partial x^j}=V^i\delta_i^j\frac{\partial}{\partial x^j}$$

因$\delta_i^j\frac{\partial}{\partial x^j}=\frac{\partial}{\partial x^i}$，于是斜交曲线坐标系下算符$\boldsymbol{v}\cdot\nabla$的表达式为

$$\boldsymbol{v}\cdot\nabla=V^i\frac{\partial}{\partial x^i}\tag{3-83$''$}$$

（二）矢量$\boldsymbol{A}$的散度

由矢量$\boldsymbol{A}$散度的定义式

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A}=\nabla\cdot\boldsymbol{A}$$

及哈密尔顿算子 ∇ 表达式

$$\nabla = e^i \frac{\partial}{\partial x^i} = g^{ij} e_j \frac{\partial}{\partial x^i};\ \nabla = e^i \nabla_i = e_j \nabla^j$$

则有 $$\operatorname{div} \boldsymbol{A} = \nabla \cdot \boldsymbol{A} = e^i \frac{\partial}{\partial x^i} \cdot \boldsymbol{A} = e^i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial x^i}$$

由式(3-62)，得

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} = \nabla \cdot \boldsymbol{A} = e^i \cdot (\nabla_i A^j) e_j = \nabla_i A^j (e^i \cdot e_j)$$

或

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = (\nabla_i A^j) \delta^i_j = \nabla_i A^i \tag{3-84}$$

但已知 $$\nabla_i A^i = \left(\frac{\partial A^i}{\partial x^i} + A^k \Gamma^p_{kp} \right)$$

$$\Gamma^p_{kp} = \frac{\partial}{\partial x^k} \ln \sqrt{g}$$

因而 $$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \nabla_i A^i = \frac{\partial A^i}{\partial x^i} + A^k \frac{\partial}{\partial x^k} \ln \sqrt{g}$$

或

$$\left.\begin{aligned} \nabla \cdot \boldsymbol{A} &= \frac{\partial A^i}{\partial x^i} + A^i \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^i} \\ &= \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\sqrt{g} \frac{\partial A^i}{\partial x^i} + A^i \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^i} \right) \\ \nabla \cdot \boldsymbol{A} &= \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{g} A^i) \end{aligned}\right\}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{g}\, g^{ij} A_j) \tag{3-84$'$}$$

以上结果如用算子 ∇ 的逆变分量或协变分量来运算则更简单，事实上，由

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = e^i \cdot \nabla_i \boldsymbol{A} = e^i \cdot (\nabla_i A^j) e_j = (e^i \cdot e_j)(\nabla_i A^j)$$

由于 $e^i \cdot e_j = \delta^i_j$ 所以

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \delta^i_j (\nabla_i A^j) = \nabla_i A^i = \nabla_j A^j$$

同理，由 $\nabla = g^{im} e_m \frac{\partial}{\partial x^i} = e_m \nabla^m$ 可得

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\boldsymbol{e}_m\nabla^m\cdot\boldsymbol{A}=\boldsymbol{e}_m\cdot(\nabla^m A_j)\boldsymbol{e}^j=(\boldsymbol{e}_m\cdot\boldsymbol{e}^j)(\nabla^m A_j)$$

因
$$\boldsymbol{e}_m\cdot\boldsymbol{e}^j=\delta_m^j$$

则
$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\delta_m^j(\nabla^m A_j)=\nabla^m A_m=\nabla^j A_j$$

所以
$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\nabla_i A^i=\nabla^i A_i$$

[例题 13] 试证 $\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\mathrm{tr}[\nabla_k A^j]$

解:

由
$$\nabla_k A^j=\frac{\partial A^j}{\partial x^k}+A^i\Gamma_{ik}^j$$

令 $j=k$ 并求和，则

$$\nabla_k A^k=\mathrm{tr}[\nabla_k A^j]=\frac{\partial A^k}{\partial x^k}+A^k\Gamma_{ki}^i$$

因
$$\Gamma_{ki}^i=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x^k}$$

则
$$\nabla_k A^k=\mathrm{tr}[\nabla_k A^j]=\frac{\partial A^k}{\partial x^k}+A^k\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x^k}$$

或
$$\mathrm{tr}[\nabla_k A^j]=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial(\sqrt{g}A^k)}{\partial x^k}=\nabla\cdot\boldsymbol{A}$$

由此得证。

如 A^i 以相应的物理分量表示，则由 $A^i=\sqrt{g^{ii}}a^i$，得

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^i}(\sqrt{gg^{ii}}a^i) \tag{3-85}$$

对于正交曲线坐标系，因 $g_{ij}=0(i\neq j)$，$g=g_{11}g_{22}g_{33}$，$g_{11}=h_1^2$、$g_{22}=h_2^2$、$g_{33}=h_3^2$ 所以

$$\left.\begin{aligned}\nabla\cdot\boldsymbol{A}=&\frac{1}{\sqrt{g}}\Big[\frac{\partial}{\partial x^1}(\sqrt{g_{22}g_{33}}\,a^1)\\&+\frac{\partial}{\partial x^2}(\sqrt{g_{33}g_{11}}\,a^2)+\frac{\partial}{\partial x^3}(\sqrt{g_{11}g_{22}}\,a^3)\Big]\\ \text{或}\quad\nabla\cdot\boldsymbol{A}=&\frac{1}{h_1h_2h_3}\Big[\frac{\partial}{\partial x^1}(h_2h_3a^1)\\&+\frac{\partial}{\partial x^2}(h_3h_1a^2)+\frac{\partial}{\partial x^3}(h_1h_2a^3)\Big]\end{aligned}\right\} \tag{3-86}$$

注意：在正交曲线坐标系下，$a^i = a_i$。

应用式(3-86)可直接写出柱、球坐标系下的散度为

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\frac{1}{r}\left[\frac{\partial(ra_r)}{\partial r}+\frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{\partial(ra_z)}{\partial z}\right]$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\frac{1}{R^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial R}(R^2\sin\theta\, a_R)\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial\theta}(R\sin\theta\, a_\theta)+\frac{\partial}{\partial\varphi}(Ra_\varphi)\right]$$

（三）拉普拉斯算子 Δ 的表达式

应用拉普拉斯算子 Δ 的定义及散度表达式，可得

$$\Delta=\nabla\cdot\nabla=\nabla_i\nabla^i=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^i}(\sqrt{g}\,\nabla^i)$$

已知
$$\nabla^i=g^{ij}\frac{\partial}{\partial x^j}$$

所以
$$\Delta=\nabla\cdot\nabla=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{g}\,g^{ij}\frac{\partial}{\partial x^j}\right)$$

除此以外，还可应用标量函数 ϕ 之梯度场的散度来求得 Δ 的表达式如下：

对于梯量场，其梯度的散度定义为

$$\nabla^2\phi=\Delta\phi=\mathrm{div}(\mathrm{grad})\phi=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left[\sqrt{g}\,(\mathrm{grad}\phi)^i\right]$$

已知 $\mathrm{grad}\phi$ 的协变分量为 $\frac{\partial\phi}{\partial x^i}$、逆变分量为 $g^{ij}\frac{\partial\phi}{\partial x^j}$，

因而
$$\Delta\phi=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{g}\,g^{ij}\frac{\partial\phi}{\partial x^j}\right)$$

对于正交曲线坐标，$\Delta\phi=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{g}\,g^{ii}\frac{\partial\phi}{\partial x^i}\right)$，于是

$$\left.\begin{aligned}&\Delta=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{g}\,g^{ij}\frac{\partial}{\partial x^j}\right)\\ \text{正交时}\quad&\Delta=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{g}\frac{1}{h_i^2}\frac{\partial}{\partial x^i}\right)\end{aligned}\right\}\qquad(3\text{-}87)$$

如果是柱坐标，则

$$\Delta=\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial}{r\partial\varphi}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(r\frac{\partial}{\partial z}\right)\right]$$

或
$$\Delta=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

而球坐标则是

$$\Delta=\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial}{\partial R}\right)+\frac{1}{R^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)$$
$$+\frac{1}{R^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

由此，还可进一步求得矢量 $\boldsymbol{A}$ 之散度的梯度如下：

根据定义，$\text{div}\,\boldsymbol{A}$ 的梯度应是

$$\nabla(\nabla_p A^p)=\boldsymbol{e}^i\frac{\partial}{\partial x^i}(\nabla_p A^p)=\text{grad}(\text{div}\boldsymbol{A})$$

其协变分量为

$$[\text{grad}(\text{div}\boldsymbol{A})]_i=\frac{\partial}{\partial x^i}(\nabla_p A^p)=\nabla_i(\nabla_p A^p)$$

而逆变分量则为

$$[\text{grad}(\text{div}\boldsymbol{A})]^i=g^{ij}\frac{\partial}{\partial x^j}(\nabla_p A^p)=g^{ij}\nabla_j(\nabla_p A^p)$$

(四) 矢量 $\boldsymbol{A}$ 的旋度表达式

由旋度定义式

$$\text{rot}\boldsymbol{A}=\nabla\times\boldsymbol{A}\quad 及\quad \nabla=\boldsymbol{e}^i\frac{\partial}{\partial x^i}$$

可得
$$\nabla\times\boldsymbol{A}=\boldsymbol{e}^i\times\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial x^i}=\boldsymbol{e}^i\times(\nabla_i A_j)\boldsymbol{e}^j$$

或
$$\nabla\times\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{e}^i\times\boldsymbol{e}^j)\nabla_i A_j$$

但
$$\boldsymbol{e}^i\times\boldsymbol{e}^j=\varepsilon_{ijk}\frac{\boldsymbol{e}_k}{v}=\varepsilon_{ijk}\frac{\boldsymbol{e}_k}{\sqrt{g}}=\varepsilon_{ijk}\boldsymbol{e}_k$$

于是
$$\nabla\times\boldsymbol{A}=\frac{1}{\sqrt{g}}\varepsilon_{ijk}(\nabla_i A_j)\boldsymbol{e}_k=\varepsilon_{ijk}(\nabla_i A_j)\boldsymbol{e}_k$$

或 $$\nabla\times\boldsymbol{A}=\frac{1}{\sqrt{g}}[(\nabla_2A_3-\nabla_3A_2)\boldsymbol{e}_1+(\nabla_3A_1-\nabla_1A_3)\boldsymbol{e}_2+(\nabla_1A_2-\nabla_2A_1)\boldsymbol{e}_3]$$

根据式(3-64)

$$\nabla_iA_j=\frac{\partial A_j}{\partial x^i}-A_k\Gamma^k_{ji},\quad \nabla_jA_i=\frac{\partial A_i}{\partial x^j}-A_k\Gamma^k_{ij}$$

以及 $\Gamma^k_{ji}=\Gamma^k_{ij}$，于是

$$\nabla\times\boldsymbol{A}=\frac{1}{\sqrt{g}}\left[\left(\frac{\partial A_3}{\partial x^2}-\frac{\partial A_2}{\partial x^3}\right)\boldsymbol{e}_1+\left(\frac{\partial A_1}{\partial x_3}-\frac{\partial A_3}{\partial x_1}\right)\boldsymbol{e}_2+\left(\frac{\partial A_2}{\partial x^1}-\frac{\partial A_1}{\partial x^2}\right)\boldsymbol{e}_3\right] \tag{3-88}$$

或以行列式表示

$$\nabla\times\boldsymbol{A}=\frac{1}{\sqrt{g}}\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3\\ \dfrac{\partial}{\partial x^1} & \dfrac{\partial}{\partial x^2} & \dfrac{\partial}{\partial x^3}\\ A_1 & A_2 & A_3\end{vmatrix} \tag{3-89}$$

如以物理分量表示，则为

$$\nabla\times\boldsymbol{A}=\frac{1}{\sqrt{g}}\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3\\ \dfrac{\partial}{\partial x^1} & \dfrac{\partial}{\partial x^2} & \dfrac{\partial}{\partial x^3}\\ \sqrt{g_{11}}a_1 & \sqrt{g_{22}}a_2 & \sqrt{g_{33}}a_3\end{vmatrix} \tag{3-90}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{A}=\frac{1}{\sqrt{g}}\begin{vmatrix}\sqrt{g_{11}}\boldsymbol{l}_1 & \sqrt{g_{22}}\boldsymbol{l}_2 & \sqrt{g_{33}}\boldsymbol{l}_3\\ \dfrac{\partial}{\partial x^1} & \dfrac{\partial}{\partial x^2} & \dfrac{\partial}{\partial x^3}\\ \sqrt{g_{11}}a_1 & \sqrt{g_{22}}a_2 & \sqrt{g_{33}}a_3\end{vmatrix} \tag{3-91}$$

现可求得柱、球坐标下，矢量 $\boldsymbol{A}$ 的旋度为

$$\nabla\times\boldsymbol{A}=\frac{1}{r}\begin{vmatrix}\boldsymbol{l}_r & r\boldsymbol{l}_\varphi & \boldsymbol{l}_z\\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ a_r & ra_\varphi & a_z\end{vmatrix}$$

或 $$\nabla\times A=\frac{1}{r}\left[\frac{\partial a_z}{\partial\varphi}-\frac{\partial}{\partial z}(ra_\varphi)\right]l_r+\left(\frac{\partial a_r}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial r}\right)l_\varphi+\frac{1}{r}\left[\frac{\partial(ra_\varphi)}{\partial r}-\frac{\partial a_r}{\partial\varphi}\right]l_z$$

$$\nabla\times A=\frac{1}{R^2\sin\theta}\begin{vmatrix} e_R & e_\theta & e_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial R} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\varphi} \\ A_R & A_\theta & A_\varphi \end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{R^2\sin\theta}\begin{vmatrix} l_R & Rl_\theta & R\sin\theta l_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial R} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\varphi} \\ a_R & Ra_\theta & R\sin\theta a_\varphi \end{vmatrix}$$

$$=\left[\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta a_\varphi)-\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial a_\theta}{\partial\varphi}\right]l_R+\left[\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial a_R}{\partial\varphi}-\frac{1}{R}\frac{\partial(Ra_\varphi)}{\partial R}\right]l_\theta+\left[\frac{1}{R}\frac{\partial(Ra_\theta)}{\partial R}-\frac{1}{R}\frac{\partial a_R}{\partial\theta}\right]l_\varphi$$

利用以上结果，下面证明几个矢量恒等式如下：

1．试证 $(v\cdot\nabla)v=\nabla\left(\frac{V^2}{2}\right)-v\times(\nabla\times v)$

证：由

$$\nabla\times v=\frac{1}{\sqrt{g}}\varepsilon_{ijk}(\nabla_i V_j)e_k=\epsilon_{ijk}(\nabla_i V_j)e_k$$

及 $$v=e_l V^l$$

得 $$v\times(\nabla\times v)=e_l v^l\times\left[\frac{1}{\sqrt{g}}\varepsilon_{ijk}(\nabla_i v_j)e_k\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{g}}\varepsilon_{ijk}v^l[(\nabla_i v_j)(e_l\times e_k)]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{g}}\varepsilon_{ijk}v^l[(\nabla_i v_j)\varepsilon_{lkm}\sqrt{g}]e^m$$

$$= -\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk}V^i(\nabla_l V_j)e^m$$

$$= -(\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl})V^i(\nabla_l V_j)e^m$$

$$= [-V^i(\nabla_i v_m)+V^j(\nabla_m V_j)]e^m$$

$$= -V^i\left(\frac{\partial v}{\partial x^i}\cdot e_m\right)e^m+V^j\left(\frac{\partial v}{\partial x^m}\cdot e_j\right)e^m$$

由于 $\left(\frac{\partial v}{\partial x^i}\cdot e_m\right)e^m=\frac{\partial v}{\partial x^i}$; $V^j\left(\frac{\partial v}{\partial x^m}\cdot e_j\right)=v\cdot\frac{\partial v}{\partial x^m}$

$$\left(v\cdot\frac{\partial v}{\partial x^m}\right)e^m=e^m\frac{\partial}{\partial x^m}\left(\frac{v\cdot v}{2}\right)=\nabla\left(\frac{v^2}{2}\right)$$

所以

$$v\times(\nabla\times v)=-V^i\frac{\partial v}{\partial x^i}+\nabla\left(\frac{v^2}{2}\right)$$

$$v\times(\nabla\times v)=-(v\cdot\nabla)v+\nabla\left(\frac{v^2}{2}\right)$$

$$(v\cdot\nabla)v=\nabla\left(\frac{v^2}{2}\right)-v\times(\nabla\times v)$$

2．试证 $\nabla\times(\nabla\phi)=0$

证：令 $A=\nabla\phi$, 则

$$\nabla\times(\nabla\phi)=\nabla\times A=e^i\times\frac{\partial A}{\partial x^i}=e^i\times(\nabla_i A_j)e^j$$

$$=\varepsilon_{ijk}\frac{1}{\sqrt{g}}(\nabla_i A_j)e^k$$

$$=\frac{1}{\sqrt{g}}[(\nabla_2 A_3-\nabla_3 A_2)e^1$$

$$+(\nabla_3 A_1-\nabla_1 A_3)e^2+(\nabla_1 A_2-\nabla_2 A_1)e^3]$$

由于 $\nabla_1 A_2-\nabla_2 A_1=\frac{\partial A_2}{\partial x^1}-\frac{\partial A_1}{\partial x^2}$; $A_1=\frac{\partial\phi}{\partial x^1}$, $A_2=\frac{\partial\phi}{\partial x^2}$

于是 $\nabla_2 A_1-\nabla_1 A_2=\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x^1}\right)-\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x^2}\right)=0$

依此可证 $\nabla_3 A_1-\nabla_1 A_3=0$; $\nabla_2 A_3-\nabla_3 A_2=0$

因而 $\nabla\times(\nabla\phi)=0$

第十节　斜交曲线坐标系下，质点的运动速度和加速度表达式

设质点在空间运动，在 t 瞬时所处的位置以坐标 x^i 表示，则 $x^i=x^i(t)$，x^i 在 $t>0$ 时连续、偏导数存在。

令 $\boldsymbol{r}_P(x^i)$ 为 t 瞬时质点的位置矢量，根据速度的定义，此质点的速度 $\boldsymbol{v}$ 应是

$$\boldsymbol{v}=\frac{D\boldsymbol{r}_P}{Dt}=\frac{\partial \boldsymbol{r}_P}{\partial x^i}\frac{Dx^i}{Dt}$$

由于

$$\boldsymbol{e}_i=\frac{\partial \boldsymbol{r}_P}{\partial x^i}$$

因而

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{e}_i\frac{Dx^i}{Dt} \tag{3-92}$$

显然，$\frac{Dx^i}{Dt}$ 是速度 $\boldsymbol{v}$ 的逆变分量，则

$$V^i=\frac{Dx^i}{Dt},\ \boldsymbol{v}=V^i\boldsymbol{e}_i \tag{3-93}$$

加速度 $\boldsymbol{a}$ 为速度 $\boldsymbol{v}$ 对时间 t 的全导数，即

$$\boldsymbol{a}=\frac{D\boldsymbol{v}}{Dt}$$

但由于 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}(x^1,\ x^2,\ x^3,\ t)$，所以

$$\boldsymbol{a}=\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x^i}\frac{Dx^i}{Dt}$$

如令 $\frac{\partial \boldsymbol{e}_i}{\partial t}=0$，则

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}=\frac{\partial(V^i\boldsymbol{e}_i)}{\partial t}=\boldsymbol{e}_i\frac{\partial V^i}{\partial t}$$

同时，由式(3-62)、(3-63)得

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x^i}=(\nabla_i V^j)\boldsymbol{e}_j=\left(\frac{\partial V^j}{\partial x^i}+V^k\Gamma^j_{ik}\right)\boldsymbol{e}_j$$

于是

$$\boldsymbol{a}=\frac{\partial V^j}{\partial t}\boldsymbol{e}_j+(\nabla_i V^j)\frac{Dx^i}{Dt}\boldsymbol{e}_j$$

$$=\left[\frac{\partial V^j}{\partial t}+(\nabla_i V^j)\frac{Dx^i}{Dt}\right]\boldsymbol{e}_j$$

或

$$a^j=\frac{\partial V^j}{\partial t}+(\nabla_i V^j)\frac{Dx^i}{Dt}$$

$$=\left(\frac{\partial V^j}{\partial t}+\frac{\partial V^j}{\partial x^i}\frac{Dx^i}{Dt}+\Gamma^j_{ik}V^k\frac{Dx^i}{Dt}\right)$$

但因 $$\frac{DV^j}{\partial t}+\frac{\partial V^j}{\partial x^i}\frac{Dx^i}{Dt}=\frac{DV^j}{Dt}$$

于是，最后可得加速度 $\boldsymbol{a}$ 的逆变分量表达式

$$\left.\begin{aligned}&a^j=\frac{DV^j}{Dt}+\Gamma^j_{ik}\frac{Dx^i}{Dt}V^k\\ &\text{或}\\ &a^j=\frac{\partial V^j}{\partial t}+V^i\frac{\partial V^j}{\partial x^i}+V^iV^k\Gamma^j_{ik}=\frac{\partial V^j}{\partial t}+V^i(\nabla_i V^j)\end{aligned}\right\}\quad(3\text{-}94)$$

又由于 $$V^j=\frac{Dx^j}{Dt}$$

所以 $$\frac{DV^j}{Dt}=\frac{D^2x^j}{Dt^2}$$

为了书写方便，现引进 $\frac{\delta V^j}{\delta t}$ 记号，并令

$$\frac{\delta V^j}{\delta t}=\frac{D^2x^j}{Dt^2}+\Gamma^j_{ik}V^iV^k$$

则式(3–84)可写成

$$a^j=\frac{\delta V^j}{\delta t}=\frac{D^2x^j}{Dt^2}+V^iV^k\Gamma^j_{ik}\qquad(3\text{–}94)'$$

以上为速度 $\boldsymbol{v}$ 和加速度 $\boldsymbol{a}$ 在斜交曲线坐标系下的表达式。对

于正交曲线坐标系，只须将式(3-78)代入式(3-94)即得。式(3-94)中的上指标"j"的指定指标。

对于正交曲线坐标系，可由式(3-78)加以简化，即

$$a^j=\frac{\partial V^j}{\partial t}+V^i\frac{\partial v^j}{\partial x^i}+V^iV^k\Gamma^j_{ik}$$

$$=\frac{\partial V^j}{\partial t}+V^i\frac{\partial v^j}{\partial x^i}+\Gamma^j_{ii}V^iV^i+\Gamma^j_{jk}V^kV^j+\Gamma^j_{ij}V^iV^j$$

由于"k""i"都是求和指标，因而

$$\Gamma^j_{jk}V^k=\Gamma^j_{ij}V^i$$

同时，应用 $a(j)=h_ja^j,\ v^i=\frac{V^i}{h_i}=\frac{\text{v}_i}{h_i},\ v^j=\frac{\text{v}_j}{h_j}$

$$\Gamma^j_{ii}=-\frac{h_i}{h_j^2}\frac{\partial h_i}{\partial x^j},\ \Gamma^j_{ji}=\frac{1}{h_j}\frac{\partial h_j}{\partial x^i}$$

则

$$\frac{1}{h_j}a(j)=\frac{1}{h_j}\frac{\partial v_j}{\partial t}+\frac{\text{v}_i}{h_i}\frac{\partial}{\partial x^i}\left[\frac{\text{v}_j}{h_j}\right]-\frac{h_i}{h_j^2}\frac{\partial h_i}{\partial x^j}\frac{1}{h_i^2}\text{v}_i\text{v}_i$$

$$+2\frac{1}{h_j}\frac{1}{h_ih_j}\frac{\partial h_j}{\partial x^i}\text{v}_i\text{v}_j$$

经化简并整理得

$$a(j)=\frac{\partial \text{v}_j}{\partial t}+\sum_{i=1}^{3}\frac{\text{v}_i}{h_i}\left[\frac{\partial \text{v}_j}{\partial x^i}+\frac{\text{v}_j}{h_j}\frac{\partial h_j}{\partial x^i}-\frac{\text{v}_i}{h_j}\frac{\partial h_i}{\partial x^j}\right] \tag{3-95}$$

式中 $a(j)$ 为加速度 a 的第 j 个投影分量（或物理分量），求和号表示只对"i"求和，而"j"虽出现两次，但并非求和指标。

将式(3-95)展开，得

$$a(1)=\frac{\partial \text{v}_1}{\partial t}+\frac{\text{v}_1}{h_1}\frac{\partial \text{v}_1}{\partial x^1}+\frac{\text{v}_2}{h_2}\frac{\partial \text{v}_1}{\partial x^2}+\frac{\text{v}_3}{h_3}\frac{\partial \text{v}_1}{\partial x^3}+\frac{\text{v}_1\text{v}_2}{h_1h_2}\frac{\partial h_1}{\partial x^2}$$

$$+\frac{\text{v}_1\text{v}_3}{h_1h_3}\frac{\partial h_1}{\partial x^3}-\frac{\text{v}_2^2}{h_1h_2}\frac{\partial h_2}{\partial x^1}-\frac{\text{v}_3^2}{h_3h_1}\frac{\partial h_3}{\partial x^1}$$

$$a(2)=\frac{\partial \text{v}_2}{\partial t}+\frac{\text{v}_1}{h_1}\frac{\partial \text{v}_2}{\partial x^1}+\frac{\text{v}_2}{h_2}\frac{\partial \text{v}_2}{\partial x^2}+\frac{\text{v}_3}{h_3}\frac{\partial \text{v}_2}{\partial x^3}+\frac{\text{v}_2\text{v}_3}{h_2h_3}\frac{\partial h_2}{\partial x^3}$$

$$+\frac{v_1 v_2}{h_1 h_2}\frac{\partial h_2}{\partial x^1}-\frac{v_1^2}{h_1 h_2}\frac{\partial h_1}{\partial x^2}-\frac{v_3^2}{h_2 h_3}\frac{\partial h_3}{\partial x^2}$$

$$a(3)=\frac{\partial v_3}{\partial t}+\frac{v_1}{h_1}\frac{\partial v_3}{\partial x^1}+\frac{v_2}{h_2}\frac{\partial v_3}{\partial x^2}+\frac{v_3}{h_3}\frac{\partial v_3}{\partial x^3}+\frac{v_3 v_2}{h_3 h_2}\frac{\partial h_3}{\partial x^2}$$

$$+\frac{v_3 v_1}{h_3 h_1}\frac{\partial h_3}{\partial x^1}-\frac{v_1^2}{h_1 h_3}\frac{\partial h_1}{\partial x^3}-\frac{v_2^2}{h_1 h_3}\frac{\partial h_2}{\partial x^3} \qquad (3\text{-}96)$$

至此，可求出柱、球坐标系下，质点的运动速度和加速度如下：

1．柱坐标系下的速度、加速度

由
$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{e}_i\frac{Dx^i}{Dt}=\sqrt{g_{ii}}\boldsymbol{l}_i\frac{Dx^i}{Dt}$$

以及 $g_{11}=1,\ g_{22}=r^2,\ g_{33}=1$

可得柱坐标系下的速度表达式

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{l}_r\frac{Dr}{Dt}+\boldsymbol{l}_\varphi\frac{rD\varphi}{Dt}+\boldsymbol{l}_z\frac{Dz}{Dt}=\boldsymbol{l}_r v_r+\boldsymbol{l}_\varphi v_\varphi+\boldsymbol{l}_z v_z$$

式中
$$v_r=\frac{Dr}{Dt},\quad v_\varphi=\frac{rD\varphi}{Dt},\quad v_z=\frac{Dz}{Dt}$$

至于加速度 $\boldsymbol{a}$，则由于柱坐标系下

$$\Gamma^1_{22}=\Gamma^r_{\varphi\varphi}=-r,\ \Gamma^2_{12}=\Gamma^\varphi_{r\varphi}=\frac{1}{r}=\Gamma^\varphi_{\varphi r}$$

所以 $a(r)=\dfrac{D^2r}{Dt^2}-r\left(\dfrac{D\varphi}{Dt}\right)^2,\ a(\varphi)=\left(\dfrac{D^2\varphi}{Dt^2}+\dfrac{2}{r}\dfrac{Dr}{Dt}\dfrac{D\varphi}{Dt}\right)r$

$$a(z)=\frac{D^2z}{Dt^2}$$

由于 $v_r=\dfrac{Dr}{Dt},\ v_\varphi=\dfrac{rD\varphi}{Dt},\ v_z=\dfrac{Dz}{Dt}$，因而

$$a(r)=\frac{D}{Dt}\left(\frac{Dr}{Dt}\right)-\frac{1}{r}\left(\frac{rD\varphi}{Dt}\right)^2=\frac{Dv_r}{Dt}-\frac{v_\varphi^2}{r}$$

$$a(\varphi)=\frac{D}{Dt}\left(\frac{rD\varphi}{Dt}\right)+\frac{1}{r}\left(\frac{rD\varphi}{Dt}\right)\left(\frac{Dr}{Dt}\right)=\frac{Dv_\varphi}{Dt}+\frac{v_\varphi v_r}{r}$$

$$a(z)=\frac{Dv_z}{Dt}$$

2. 球坐标系下，质点的速度 $\boldsymbol{v}$ 及加速度 $\boldsymbol{a}$

对于球坐标系，因

$$\boldsymbol{e}_R=\sqrt{g_{RR}}\,\boldsymbol{l}_R=\boldsymbol{l}_R,\quad \boldsymbol{e}_\theta=\sqrt{g_{\theta\theta}}\,\boldsymbol{l}_\theta=R\boldsymbol{l}_\theta$$

$$\boldsymbol{e}_\varphi=\sqrt{g_{\varphi\varphi}}\,\boldsymbol{l}_\varphi=R\sin\theta\boldsymbol{l}_\varphi$$

于是

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{l}_R\frac{DR}{Dt}+R\sin\theta\boldsymbol{l}_\varphi\frac{D\theta}{Dt}+R\boldsymbol{l}_\theta\frac{D\theta}{Dt}$$

$$\boldsymbol{a}(R)=\frac{\partial \mathrm{v}_R}{\partial t}+\mathrm{v}_R\frac{\partial \mathrm{v}_R}{\partial R}+\frac{\mathrm{v}_\theta}{R}\frac{\partial \mathrm{v}_R}{\partial \theta}+\frac{\mathrm{v}_\varphi}{R\sin\theta}\frac{\partial \mathrm{v}_R}{\partial \varphi}-\frac{\mathrm{v}_\varphi^2+\mathrm{v}_\theta^2}{R}$$

$$\boldsymbol{a}(\theta)=\frac{\partial \mathrm{v}_\theta}{\partial t}+\mathrm{v}_R\frac{\partial \mathrm{v}_\theta}{\partial R}+\frac{\mathrm{v}_\theta}{R}\frac{\partial \mathrm{v}_\theta}{\partial \theta}$$

$$+\frac{\mathrm{v}_\varphi}{R\sin\theta}\frac{\partial \mathrm{v}_\theta}{\partial \varphi}+\frac{\mathrm{v}_R\mathrm{v}_\theta}{R}-\frac{\mathrm{v}_\varphi^2\cot\theta}{R}$$

$$\boldsymbol{a}(\varphi)=\frac{\partial \mathrm{v}_\varphi}{\partial t}+\mathrm{v}_R\frac{\partial \mathrm{v}_\varphi}{\partial R}+\frac{\mathrm{v}_\theta}{R}\frac{\partial \mathrm{v}_\varphi}{\partial \theta}$$

$$+\frac{\mathrm{v}_\varphi}{R\sin\theta}\frac{\partial \mathrm{v}_\varphi}{\partial \varphi}+\frac{\mathrm{v}_R\mathrm{v}_\varphi}{R}+\frac{\mathrm{v}_\varphi\mathrm{v}_\theta\cot\theta}{R}$$

第十一节 二阶普遍张量及其分析

在第二章中涉及的笛卡尔应力张量表达式，由于所取的微元体积是正棱形体，因而在建立各微元控制面之间的关系时可应用投影定理求得。斜交曲线坐标系则不同，如果取微元坐标曲线作为棱边取微元控制体，则不能简单地采用投影定理来建立各微元控制面之间的关系。

由于这一原因，为了较好地了解空间一点的应力状态，在讨论应力张量之前，先分析微元控制面间的关系式。

如图(3-10a、b)所示。设在流体(或固体)中任取一点 O，过点 O 引出三条坐标曲线 x^i 及基本矢量 $\boldsymbol{e}_i$，沿 x^i 方向取微元矢量 $d\boldsymbol{s}_i$。

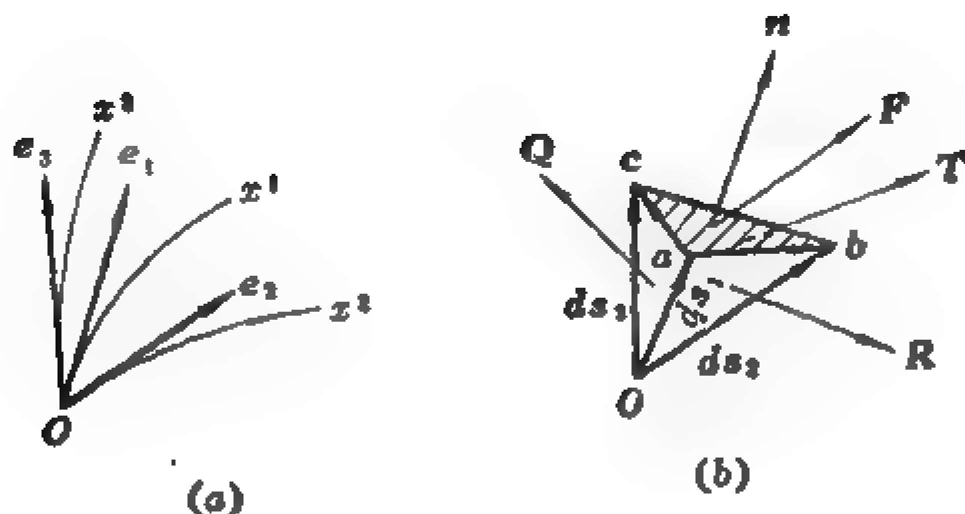


图 8-10

$$ds_1 = e_1 dx^1,\ ds_2 = e_2 dx^2,\ ds_3 = e_3 dx^3$$

显然，微元矢量端点 a、b、c 可连成三角形 $\triangle abc$，如以 $d\sigma$ 表示此三角形，则

$$d\sigma = \frac{1}{2}(ab \times ac)$$

已知 $$ab = (ds_2 - ds_1),\ ac = (ds_3 - ds_1)$$

因而 $$d\sigma = \frac{1}{2}[(ds_2 - ds_1) \times (ds_3 - ds_1)]$$

按矢量运算规则，将上式展开，则

$$ds_2 \times ds_1 = -ds_1 \times ds_2,\ ds_1 \times ds_1 = 0$$
$$ds_1 \times ds_3 = -ds_3 \times ds_1$$

于是 $$d\sigma = \frac{1}{2}(ds_1 \times ds_2 + ds_2 \times ds_3 + ds_3 \times ds_1)$$

或 $$d\sigma = \frac{1}{2}[(e_1 \times e_2)dx^1 dx^2 + (e_2 \times e_3)dx^2 dx^3 + (e_3 \times e_1)dx^3 dx^1]$$

因 $$e_i \times e_j = \sqrt{g}\, e^k \quad (i,\ j,\ k \text{ 按偶排列})$$

则 $$d\sigma = \frac{1}{2}\sqrt{g}\,(dx^2 dx^3 e^1 + dx^3 dx^1 e^2 + dx^1 dx^2 e^3)$$

或简写成

$$d\sigma = d\sigma_i e^i = d\sigma_i \sqrt{g^{ii}}\, l^i = dS_i l^i \qquad (8\text{–}97)$$

式中 $d\sigma_i$ 是 $d\sigma$ 的协变分量；dS_i 代表对应面积的绝对值(模)。

$d\sigma_i$ 及 dS_i 可分别表示成

$$d\sigma_1=\frac{1}{2}\sqrt{g}\,dx^2dx^3,\ d\sigma_2=\frac{1}{2}\sqrt{g}\,dx^3dx^1,\ d\sigma_3=\frac{1}{2}\sqrt{g}\,dx^1dx^2$$

$$dS_1=\frac{1}{2}\sqrt{gg^{11}}\,dx^2dx^3,\ dS_2=\frac{1}{2}\sqrt{gg^{22}}\,dx^3dx^1$$

$$dS_3=\frac{1}{2}\sqrt{gg^{33}}\,dx^1dx^2$$

至于曲线坐标面的表达式则可写成

$$\triangle oab:\ \frac{1}{2}(d\boldsymbol{s}_2\times d\boldsymbol{s}_1)=\frac{1}{2}\varepsilon_{213}\sqrt{g}\,dx^2dx^1\boldsymbol{e}^3=-d\sigma_3\boldsymbol{e}^3$$

$$\triangle oac:\ \frac{1}{2}(d\boldsymbol{s}_1\times d\boldsymbol{s}_3)=\frac{1}{2}\varepsilon_{132}\sqrt{g}\,dx^1dx^3\boldsymbol{e}^2=-d\sigma_2\boldsymbol{e}^2$$

$$\triangle obc:\ \frac{1}{2}(d\boldsymbol{s}_3\times d\boldsymbol{s}_2)=\frac{1}{2}\varepsilon_{321}\sqrt{g}\,dx^3dx^2\boldsymbol{e}^1=-d\sigma_1\boldsymbol{e}^1$$

这里取负号，是由于三个坐标曲面的外法线方向与倒易基本矢量 $\boldsymbol{e}^i$ 方向相反之故。dS_i 还可利用 $g^{ii}=\dfrac{G_{ii}}{g}$ 加以改写如下：

由 $$dS_i=\frac{1}{2}\sqrt{gg^{ii}}\,dx^jdx^k$$

以及 $$g^{ii}=\frac{G_{ii}}{g},\ G_{ii}=gg^{ii}=g_{jj}g_{kk}-g_{jk}^2$$

于是 $$dS_i=\frac{1}{2}\sqrt{G_{ii}}\,dx^jdx^k=\frac{1}{2}\sqrt{g_{jj}g_{kk}-g_{jk}^2}\,dx^jdx^k$$

对于正交曲线坐标系，得

$$g_{jk}=0(j\neq k)\quad g=g_{ii}g_{jj}g_{kk}$$

因而 $$dS_i=\sqrt{\frac{g}{g_{ii}}}\,dx^jdx^k$$

在求得以上结果的基础上，再令 $\boldsymbol{n}$ 为 $\triangle abc$ 的单位矢量，则

$$d\sigma\boldsymbol{n}=d\boldsymbol{\sigma},$$

代入式(3-97)，得

$$d\sigma \boldsymbol{n} = dS_i \boldsymbol{l}^i \tag{3-98}$$

如将 $\boldsymbol{n}$ 向倒易基本矢量 $\boldsymbol{e}^i$ 方向分解，并令 N_i 为 $\boldsymbol{n}$ 的对应协变分量，n_i 为 $\boldsymbol{n}$ 的可分解分量之绝对值，则

$$d\sigma = d\sigma n_i \boldsymbol{l}^i, \quad n_i = N_i \sqrt{g^{ii}}$$

代入式(3-98)，则得

$$\left.\begin{aligned} d\sigma n_i \boldsymbol{l}^i = dS_i \boldsymbol{l}^i \\ dS_i = d\sigma n_i \end{aligned}\right\} \tag{3-99}$$

至此，可进一步分析作用在斜棱体上的外力。如图 3-10 所示，设作用在各微元表面上的表面力分别为 $\boldsymbol{T}$、$\boldsymbol{Q}$、$\boldsymbol{R}$ 及 $\boldsymbol{F}$，这些力与作用面的面积成正比，且可按基本矢量 $\boldsymbol{e}_i$ 方向分解，其中

$$\boldsymbol{T} = -\boldsymbol{p}^1 dS_1, \quad \boldsymbol{Q} = -\boldsymbol{p}^2 dS_2, \quad \boldsymbol{R} = -\boldsymbol{p}^3 dS_3$$

式中 $\boldsymbol{p}^1$、$\boldsymbol{p}^2$、$\boldsymbol{p}^3$ 表示应力。其作用面的方向分别为 $\boldsymbol{l}^1$、$\boldsymbol{l}^2$、$\boldsymbol{l}^3$（即倒易基本矢量方向），但 $\boldsymbol{p}^1$、$\boldsymbol{p}^2$、$\boldsymbol{p}^3$ 又可向基本矢量方向分解并写出分解式，即

$$\boldsymbol{p}^1 = P^{1j}\boldsymbol{e}_j, \quad \boldsymbol{p}^2 = P^{2j}\boldsymbol{e}_j, \quad \boldsymbol{p}^3 = P^{3j}\boldsymbol{e}_j$$

于是，$\quad \boldsymbol{T} = -P^{1j}\boldsymbol{e}_j dS_1, \quad \boldsymbol{Q} = -P^{2j}\boldsymbol{e}_j dS_2, \quad \boldsymbol{R} = -P^{3j}\boldsymbol{e}_j dS_3$

式中 $\boldsymbol{p}^i = -P^{ij}\boldsymbol{e}_j$ 表示作用在各微元坐标面上的应力而 P^{ij} 为 $\boldsymbol{p}^i$ 的逆变分量。

将图 3-10 中的微元控制体无限收缩，则作用在微元系统的质量力可忽略不计，而表面力则互成平衡，即

$$\boldsymbol{F} = (\boldsymbol{T} + \boldsymbol{Q} + \boldsymbol{R}) = P^{ij}\boldsymbol{e}_j dS_i \tag{3-100}$$

令 $$\boldsymbol{F} = P^{nj}\boldsymbol{e}_j d\sigma = \boldsymbol{p}^n d\sigma$$

并代入式(3-100)，同时注意到 $dS_i = d\sigma n_i$，则得

或 $$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{p}^n d\sigma = \boldsymbol{p}^i dS_i \\ P^{nj} = P^{ij} n_i \end{aligned}\right\} \tag{3-101}$$

式中 P'^{ij}——作用于 $\triangle abc$ 上应力的逆变分量；

P^{ij}——斜交曲线坐标系下应力张量 P 的逆变分量。

又由 $dS_i/d\sigma=n_i$，于是，得

$$p^i=n_ip^i \tag{3-101$'$}$$

由以上讨论可知，P^{ij} 中的第一个指标表示应力所在表面的法线方向（e^i 方向）；第二个指标则表示 p^i 向基本矢量 e_j 方向分解时的第 j 个逆变分量。

已知过空间一点，既可选取基本局部标架，也可选取倒易局部标架，因而，其应力也必然有两种不同的表达式。

如果取基本矢量 e_i 方向的微元坐标曲线 $ds_i=e_idx^i$ 为棱边构成微元斜棱体，由于各微元坐标面的外法线方向为 e^i，因而应力张量的元素有：

P^{ij}——应力作用面的外法线方向是倒易基本矢量方向，但是按基本矢量方向分解的应力张量元素；

$P^i{}_j$——应力作用面的法线方向为倒易基本矢量方向，但按倒易基本矢量方向分解。

如果取倒易基本矢量 e^i 方向的微元坐标曲线 $ds^i=e^idx_i$ 为棱边构成微元斜棱体，由于各微元坐标面的外法线方向为 e_i，因而应力张量的元素有：

$P_i{}^j$——应力作用面的外法线方向为基本矢量方向，但向基本矢量方向分解；

P_{ij}——应力作用面的外法线方向为基本矢量方向，但向倒易基本矢量方向分解。

同是应力张量，但在斜交曲线坐标系下，其元素可有四种不同表示形式。因此，应力张量 P 为

$$P=e_iP^{ij}e_j=e_iP^i{}_je^j=e^iP_i{}^je_j=e^iP_{ij}e^j \tag{3-102}$$

由式（3-102）可推论，在斜交曲线坐标系下的单位矢量 I 应

为

$$I=e^ie_i=e^i\delta_i^je_j=e^ig_{ij}e^j=e_ig^{ij}e_j=e_i\delta_j^ie^j$$

因 $$A\cdot I=(A^je_j)\cdot(e^ie_i)=A^j(\delta_j^i)e_i=A^ie_i=A$$

引进二阶普遍张量以后，度量张量元素 g_{ij} 可看成单位张量 I 的协变分量；g^{ij} 是 I 的逆变分量，而 δ_i^j 与 δ_j^i 则是 I 的混合分量。事实上

$$A\cdot I=A^ke_k\cdot(e^ig_{ij}e^j)=\delta_k^iA^kg_{ij}e^j=A_je^j=A$$

$$A\cdot I=A_ke^k(e_ig^{ij}e_j)=\delta_i^kA_kg^{ij}e_j=A^je_j=A$$

综合以上结果，则有

$$I\cdot A=A\cdot I=A$$

（一）斜交曲线坐标系下位移张量

和笛卡尔坐标系相类似，设在 t 瞬时在流场中任取 $P(\boldsymbol{r}_P)$、$Q(\boldsymbol{r}_P+\delta\boldsymbol{r}_P)$ 两点，其速度分别为 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}_P)$、$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}_P+\delta\boldsymbol{r}_P)$，于是

$$d(\delta\boldsymbol{r}_P)=[\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}_P+\delta\boldsymbol{r}_P)-\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}_P)]dt$$

或 $$d(\delta\boldsymbol{r}_P)=\delta\boldsymbol{v}\,dt$$

因 $$\delta\boldsymbol{v}=\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial x^k}\delta x^k$$

故 $$\delta\boldsymbol{v}=\left(\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial x^k}\cdot e_j\right)e^j\delta x^k=(\nabla_kV_j)e^j\delta x^k$$

由式(8-64)可知

$$\nabla_kV_j=\frac{\partial V_j}{\partial x^k}-V_i\Gamma_{jk}^i$$

式中 ∇_kV_j——位移张量元素。

对于笛卡尔坐标系，由于

$$\Gamma_{jk}^i=0$$

所以 $$\nabla_kV_j=\frac{\partial V_j}{\partial x^k}=D_{jk}$$

为笛卡尔坐标系下的位移张量元素。

和第二章相类似，仍令 $\delta s=|\delta \boldsymbol{r}_P|$，则

$$(\delta s)^2=\delta \boldsymbol{r}_P\cdot\delta \boldsymbol{r}_P$$

于是
$$d(\delta s)^2=d(\delta \boldsymbol{r}_P\cdot\delta \boldsymbol{r}_P)$$

或
$$\delta s\, d(\delta s)=\delta \boldsymbol{r}_P\cdot d(\delta \boldsymbol{r}_P)=\delta \boldsymbol{r}_P\cdot\delta \boldsymbol{v}\, dt$$

但由于
$$\delta \boldsymbol{r}_P=\frac{\partial \boldsymbol{r}_P}{\partial x^i}\delta x^i=\boldsymbol{e}_i\delta x^i$$

$$\delta \boldsymbol{v}=\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x^j}\delta x^j=(\nabla_j V_k)\boldsymbol{e}^k\delta x^j$$

则
$$\frac{\delta s\, d(\delta s)}{(\delta s)^2 dt}=(\nabla_j V_k)\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}^k\delta x^i\delta x^j\frac{1}{(\delta s)^2}$$

$$\frac{d(\delta s)}{\delta s\, dt}=(\nabla_j V_i)\frac{\delta x^i}{\delta s}\frac{\delta x^j}{\delta s}=\frac{1}{2}(\nabla_j V_i+\nabla_i V_j)\frac{\delta x^i}{\delta s}\frac{\delta x^j}{\delta s}$$

现称

$$S_{ij}=\frac{1}{2}(\nabla_i V_j+\nabla_j V_i)=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial V_j}{\partial x^i}+\frac{\partial V_i}{\partial x^j}-2V_k\Gamma^k_{ij}\right] \quad (3\text{-}103)$$

为变形率张量 S 的元素。

如果是正交笛卡尔坐标，则 $S_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_j}{\partial y^i}+\frac{\partial V_i}{\partial y^j}\right)$；对于正交曲线坐标，则

1．当 $i=j$ 时，

$$S_{ij}=S_{ii}=\left[\left(\frac{\partial V_i}{\partial x^i}\right)-(V_1\Gamma^1_{ii}+V_2\Gamma^2_{ii}+V_3\Gamma^3_{ii})\right]$$

2．当 $i\neq j$ 时

$$S_{ij}=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial V_i}{\partial x^j}+\frac{\partial V_j}{\partial x^i}-2V_i\Gamma^i_{ij}-2V_j\Gamma^j_{ij}\right] \qquad (3\text{-}103)'$$

式(3-103)′中的“i”“j”均系指定指标。

以上从工程实例提出了普遍张量的概念。对于普遍张量，同样也有对称张量和反对称张量，但在下定义时，两个调换的指标必须指明是协变的或逆变的指标，例如：

$$\Pi^k_{ij}=\Pi^k_{ji} \quad (\text{对称张量})$$

$$\Pi^*_{ij}=-\Pi^*_{ji}\quad (反对称张量)$$

至于对称的混合张量

$$\Pi_i^{\cdot j}=\Pi^j_{\cdot i}$$

可直接写成 Π_i^j

（二）二阶普遍张量各类分量的关系及物理分量

如前所述，二阶普遍张量可根据张量元素的不同表示成多种形式，因而 Π 的元素也有

$$\Pi_{ij}=e_i\cdot\Pi\cdot e_j,\ \Pi_i^j=e_i\cdot\Pi\cdot e^j$$

$$\Pi^i_{\cdot j}=e^i\cdot\Pi\cdot e_j,\ \Pi^{ij}=e^i\cdot\Pi\cdot e^j$$

根据以上几种表示形式，可证明式(3-50)～(3-52)是定义二阶普遍张量的解析定义式，如

设二阶普遍张量在旧坐标系 x^i 下为 Π，而在新坐标系 x^{*i} 下为 Π^*，由绝对张量定义，应为

$$\Pi^*=e_i^*\Pi^{*ij}e_j^*=\Pi=e_p\Pi^{pq}e_q$$

因

$$e_p=\frac{\partial x^{*i}}{\partial x^p}e_i^*;\quad e_q=\frac{\partial x^{*j}}{\partial x^q}e_j^*$$

代入上式，得

$$e_i^*\Pi^{*ij}e_j^*=\frac{\partial x^{*i}}{\partial x^p}\frac{\partial x^{*j}}{\partial x^q}(e_i^*e_j^*\Pi^{pq})$$

$$e_i^*e_j^*\left(\Pi^{*ij}-\frac{\partial x^{*i}}{\partial x^p}\frac{\partial x^{*j}}{\partial x^q}\Pi^{pq}\right)=0$$

$$\Pi^{*ij}=\frac{\partial x^{*i}}{\partial x^p}\frac{\partial x^{*j}}{\partial x^q}\Pi^{pq}$$

即式(3-50)为 $\Pi=\Pi^*$ 的必要条件。反之，如果式(3-50)成立，则

$$\Pi^*=e_i^*\Pi^{*ij}e_j^*=e_i^*\frac{\partial x^{*i}}{\partial x^p}\frac{\partial x^{*j}}{\partial x^q}\Pi^{pq}e_j^*$$

由

$$e_p=\frac{\partial x^{*i}}{\partial x^p}e_i^*;\quad e_q=\frac{\partial x^{*j}}{\partial x^q}e_j^*$$

可得

$$\Pi^*=\Pi$$

即式(3-50)～(3-52)是定义二阶普遍张量的解析定义式。

除此以外，张量 Π 诸元素之间还可作相互换算如下：

$$\Pi_{ij}=\boldsymbol{e}_i\cdot\Pi\cdot\boldsymbol{e}_j=\boldsymbol{e}_i\cdot(\boldsymbol{e}_l\Pi^{lm}\boldsymbol{e}_m)\cdot\boldsymbol{e}_j$$

于是

同理

$$\left.\begin{aligned}&\Pi_{ij}=g_{il}g_{jm}\Pi^{lm}\\&\Pi_i^{\cdot j}=g_{il}\Pi^{lj},\quad \Pi^i_{\cdot j}=g_{mj}\Pi^{im}\end{aligned}\right\}\tag{3-104}$$

作为特例，如令张量 Π 为度量张量，则

$$g_{ij}=g_{il}g_{jm}g^{lm};\quad g_i^j=g_{il}g^{lj}=\delta_i^j;$$
$$g^i_j=g_{mj}g^{im}=\delta^i_j$$

由于度量张量为对称张量，所以

$$g_i^j=g^i_{\ j}=\delta_i^j=\delta^i_j$$

和矢量的讨论相类似，对于二阶普遍张量也可引出物理分量的概念。

以 π_{ij} 表示张量 Π 的协变分量，则

$$\pi_{ij}=\boldsymbol{l}_i\cdot\Pi\cdot\boldsymbol{l}_j=\boldsymbol{l}_i\cdot(\boldsymbol{e}^i\Pi\boldsymbol{e}^j)\cdot\boldsymbol{l}_j$$

或

$$\pi_{ij}=\frac{1}{\sqrt{g_{ii}}}[(\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}^i)\Pi_{ij}(\boldsymbol{e}^j\cdot\boldsymbol{e}_j)]\frac{1}{\sqrt{g_{jj}}}=\frac{1}{\sqrt{g_{ii}g_{jj}}}(\boldsymbol{e}_i\cdot\Pi\cdot\boldsymbol{e}_j)$$

于是

同理

$$\left.\begin{aligned}&\pi_{ij}=\frac{1}{\sqrt{g_{ii}g_{jj}}}\Pi_{ij}\\&\pi^{ij}=\frac{1}{\sqrt{g^{ii}g^{jj}}}\Pi^{ij}\\&\pi_i^{\cdot j}=\frac{1}{\sqrt{g_{ii}g^{jj}}}\Pi_i^{\cdot j}\end{aligned}\right\}\tag{3-105}$$

应用以上结果可得

$$p_{ij}=\frac{P_{ij}}{\sqrt{g_{ii}g_{jj}}},\quad s_{ij}=\frac{S_{ij}}{\sqrt{g_{ii}g_{jj}}}$$

由式(3-103)′及$v_i=\sqrt{g_{ii}}V_i$、$v_j=\sqrt{g_{jj}}V_j$，可得正交曲线坐标系下应变率张量元素的物理分量如下：

1．当$i=j$时

$$S_{ii}=\frac{1}{h_i^2}\left[\frac{\partial(h_i\mathrm{v}_i)}{\partial x^i}-(h_1\mathrm{v}_1\Gamma^1_{ii}+h_2\mathrm{v}_2\Gamma^2_{ii}+h_3\mathrm{v}_3\Gamma^3_{ii})\right]$$

如$i=j=1$，则

$$S_{11}=\frac{1}{h_1^2}\left[\frac{\partial(x_1\mathrm{v}_1)}{\partial x^1}-(h_2\mathrm{v}_1\Gamma^1_{11}+h_2\mathrm{v}_2\Gamma^2_{11}+h_3\mathrm{v}_3\Gamma^3_{11})\right]$$

已知

$$\Gamma^1_{11}=\frac{1}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial x^1};\quad \Gamma^2_{11}=-\frac{h_1}{h_2^2}\frac{\partial h_1}{\partial x^2};\quad \Gamma^3_{11}=-\frac{h_1}{h_3^2}\frac{\partial h_1}{\partial x^3}$$

所以

$$S_{11}=\frac{1}{h_1^2}\left[h_1\frac{\partial\mathrm{v}_1}{\partial x^1}+\mathrm{v}_1\frac{\partial h_1}{\partial x^1}-\left(\mathrm{v}_1\frac{\partial h_1}{\partial x^1}-\frac{h_1}{h_2}\mathrm{v}_2\frac{\partial h_1}{\partial x^2}-\frac{h_1\mathrm{v}_3}{h_3}\frac{\partial h_1}{\partial x^3}\right)\right]$$

或
$$S_{11}=\frac{1}{h_1}\frac{\partial\mathrm{v}_1}{\partial x^1}+\frac{1}{h_1h_2}\mathrm{v}_2\frac{\partial h_1}{\partial x^2}+\frac{1}{h_1h_3}\mathrm{v}_3\frac{\partial h_1}{\partial x^3}$$

又由
$$\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\frac{\mathrm{v}_1}{h_1}\right)=\frac{1}{h_1}\frac{\partial\mathrm{v}_1}{\partial x^1}-\frac{\mathrm{v}_1}{h_1^2}\frac{\partial h_1}{\partial x^1}$$

得
$$\frac{1}{h_1}\frac{\partial\mathrm{v}_1}{\partial x^1}=\frac{\mathrm{v}_1}{h_1h_1}\frac{\partial h_1}{\partial x^1}+\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\frac{\mathrm{v}_1}{h_1}\right)$$

于是

$$S_{11}=\frac{\mathrm{v}_1}{h_1h_1}\frac{\partial h_1}{\partial x^1}+\frac{\mathrm{v}_2}{h_1h_2}\frac{\partial h_1}{\partial x^2}+\frac{\mathrm{v}_3}{h_1h_3}\frac{\partial h_1}{\partial x^3}+\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\frac{\mathrm{v}_1}{h_1}\right)$$

或
$$S_{11}=\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\frac{\mathrm{v}_1}{h_1}\right)+\frac{1}{h_1}\sum_{k=1}^{3}\frac{\mathrm{v}_k}{h_k}\frac{\partial h_1}{\partial x^k}$$

对于S_{22}、S_{33}可依此类推，或写成

$$S_{ii}=\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\mathrm{v}_i}{h_i}\right)+\frac{1}{h_i}\sum_{k=1}^{3}\frac{\mathrm{v}_k}{h_k}\frac{\partial h_i}{\partial x^k}\qquad(3\text{-}106)$$

二、当 $i\neq j$ 时

$$S_{ij}=\frac{1}{2h_ih_j}\left[\frac{\partial(h_i\mathrm{v}_i)}{\partial x^j}+\frac{\partial(h_j\mathrm{v}_j)}{\partial x^i}-2h_i\mathrm{v}_i\frac{1}{h_i}\frac{\partial h_i}{\partial x^j}\right.$$

$$\left.-2h_j\mathrm{v}_j\frac{1}{h_j}\frac{\partial h_j}{\partial x^i}\right]$$

$$S_{ij}=\frac{1}{2h_ih_j}\left[h_i\frac{\partial\mathrm{v}_i}{\partial x^j}+\mathrm{v}_i\frac{\partial h_i}{\partial x^j}+h_j\frac{\partial\mathrm{v}_j}{\partial x^i}+\mathrm{v}_j\frac{\partial h_j}{\partial x^i}\right.$$

$$\left.-2\mathrm{v}_i\frac{\partial h_i}{\partial x^j}-2\mathrm{v}_j\frac{\partial h_j}{\partial x^i}\right]=\frac{1}{2h_ih_j}\left[h_i\frac{\partial\mathrm{v}_i}{\partial x^j}+h_j\frac{\partial\mathrm{v}_j}{\partial x^i}\right.$$

$$\left.-\mathrm{v}_i\frac{\partial h_i}{\partial x^j}-\mathrm{v}_j\frac{\partial h_j}{\partial x^i}\right]$$

由于

$$h_j\frac{\partial\mathrm{v}_j}{\partial x^i}=h_j^2\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\mathrm{v}_j}{h_j}\right)\quad \mathrm{v}_j\frac{\partial h_j}{\partial x^i}$$

$$h_i\frac{\partial\mathrm{v}_i}{\partial x^j}=h_i^2\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\mathrm{v}_i}{h_i}\right)\quad \mathrm{v}_i\frac{\partial h_i}{\partial x^j}$$

所以

$$S_{ij}=\frac{1}{2}\left[\frac{h_i}{h_j}\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\mathrm{v}_i}{h_i}\right)+\frac{h_j}{h_i}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\mathrm{v}_i}{h_j}\right)\right]\tag{3-106$'$}$$

将式(3-106)、(3-106)′展开，可得

$$\left.\begin{aligned}
S_{11}&=\frac{\mathrm{v}_1}{h_1h_1}\frac{\partial h_1}{\partial x^1}+\frac{\mathrm{v}_2}{h_1h_2}\frac{\partial h_1}{\partial x^2}+\frac{\mathrm{v}_3}{h_3h_1}\frac{\partial h_1}{\partial x^3}+\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\frac{\mathrm{v}_1}{h_1}\right)\\
S_{22}&=\frac{\mathrm{v}_1}{h_1h_2}\frac{\partial h_2}{\partial x^1}+\frac{\mathrm{v}_2}{h_2h_2}\frac{\partial h_2}{\partial x^2}+\frac{\mathrm{v}_3}{h_3h_2}\frac{\partial h_2}{\partial x^3}+\frac{\partial}{\partial x^2}\left(\frac{\mathrm{v}_2}{h_2}\right)\\
S_{33}&=\frac{\mathrm{v}_1}{h_1h_3}\frac{\partial h_3}{\partial x^1}+\frac{\mathrm{v}_2}{h_3h_2}\frac{\partial h_3}{\partial x^2}+\frac{\mathrm{v}_3}{h_3h_3}\frac{\partial h_3}{\partial x^3}+\frac{\partial}{\partial x^3}\left(\frac{\mathrm{v}_3}{h_3}\right)\\
S_{12}&=S_{21}=\frac{1}{2}\left[\frac{h_1}{h_2}\frac{\partial}{\partial x^2}\left(\frac{\mathrm{v}_1}{h_1}\right)+\frac{h_2}{h_2}\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\frac{\mathrm{v}_2}{h_2}\right)\right]\\
S_{23}&=S_{32}=\frac{1}{2}\left[\frac{h_2}{h_3}\frac{\partial}{\partial x^3}\left(\frac{\mathrm{v}_2}{h_2}\right)+\frac{h_3}{h_2}\frac{\partial}{\partial x^2}\left(\frac{\mathrm{v}_3}{h_3}\right)\right]\\
S_{31}&=S_{13}=\frac{1}{2}\left[\frac{h_3}{h_1}\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\frac{\mathrm{v}_3}{h_3}\right)+\frac{h_1}{h_3}\frac{\partial}{\partial x^3}\left(\frac{\mathrm{v}_1}{h_1}\right)\right]
\end{aligned}\right\}\tag{3-107}$$

对于柱坐标系，应为

$$S_{11}=S_{rr}=\frac{\partial v_r}{\partial r};\quad S_{22}=S_{\theta\theta}=\frac{\partial v_\theta}{r\partial\theta}+\frac{v_r}{r}$$

$$S_{33}=S_{zz}=\frac{\partial v_z}{\partial z};\quad S_{r\theta}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_r}{r\partial\theta}+\frac{\partial v_\theta}{\partial r}-\frac{v_\theta}{r}\right)=S_{\theta r};$$

$$S_{\theta z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{r\partial\theta}\right)=S_{z\theta};\quad S_{rz}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_r}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)=S_{zr}$$

对于球坐标系，则为

$$S_{RR}=\frac{\partial v_R}{\partial R};\quad S_{\theta\theta}=\frac{1}{R}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}+\frac{v_R}{R};$$

$$S_{\varphi\varphi}=\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{v_\theta}{R}\cot\theta+\frac{v_R}{R};$$

$$S_{R\theta}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{R}\frac{\partial v_R}{\partial\theta}+\frac{\partial v_\theta}{\partial R}-\frac{v_\theta}{R}\right];$$

$$S_{R\varphi}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial v_R}{\partial\varphi}+\frac{\partial v_\varphi}{\partial R}-\frac{v_\varphi}{R}\right];$$

$$S_{\theta\varphi}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial\varphi}+\frac{1}{R}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\theta}-\frac{v_\varphi}{R}\cot\theta\right]$$

以上着重讨论了变形率张量 S 的协变分量 S_{ij} 的表达式，其相应的逆变分量以及混合分量也可应用式(3-104)分别写出如下（注意：S 是对称张量）：

$$S^{ij}=g^{il}g^{jm}S_{lm}$$

由 $S_{lm}=\frac{1}{2}(\nabla_l V_m+\nabla_m V_l)$ 可得

$$g^{il}g^{jm}S_{lm}=\frac{1}{2}[(g^{il}\nabla_l)(g^{jm}V_m)+(g^{jm}\nabla_m)(g^{il}V_l)]$$

因 $g^{il}\nabla_l=\nabla^i$, $g^{jm}V_m=V^j$, $g^{jm}\nabla_m=\nabla^j$, $g^{il}V_l=V^i$

于是 $$g^{il}g^{jm}S_{lm}=\frac{1}{2}(\nabla^i V^j+\nabla^j V^i)=S^{ij}$$

同理 $$S_i^j=g^{jm}S_{im}$$

或 $$S_i^j=\frac{1}{2}[(g^{jm}\nabla_i V_m)+g^{jm}(\nabla_m V_i)]=\frac{1}{2}(\nabla_i V^j+\nabla^j V_i)$$

令 $i=j$，则

$$S_i^i=S_m^m=\frac{1}{2}(\nabla_i V^i+\nabla^i V_i)$$

由于 $\nabla_i V^i=\nabla^i V_i$ 所以

$$S_i^i=\nabla_i V^i=\operatorname{div}\boldsymbol{v}。$$

或 $$trS=S_i^i=\operatorname{div}\boldsymbol{v}。$$

第十二节　斜交曲线坐标系下，位移张量的分解以及加速度的分解式

在正交笛卡尔坐标系下，位移张量可分解为对称部分（变形率张量）和反对称张量（瞬时角速度张量）；对于斜交曲线坐标系，同样也可将位移张量分解为这两部分。下面先讨论位移张量的分解，然后再讨论加速度的分解。

由位移张量元素 D_{ij} 的表达式

$$\nabla_i V_j=\frac{\partial V_j}{\partial x^i}-V_k\Gamma_{ij}^k$$

将等式右边分别加减 $\frac{\partial v_i}{\partial x^j}$ 并经整理后，可得

$$\nabla_i V_j=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_i}{\partial x^j}+\frac{\partial V_j}{\partial x^i}-2V_k\Gamma_{ij}^k\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_j}{\partial x^i}-\frac{\partial V_i}{\partial x^j}\right)$$

由于 $$S_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_i}{\partial x^j}+\frac{\partial V_j}{\partial x^i}-2V_k\Gamma_{ij}^k\right)=\frac{1}{2}(\nabla_i V_j+\nabla_j V_i)$$

$$\Omega_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_j}{\partial x^i}-\frac{\partial V_i}{\partial x^j}\right)=\frac{1}{2}(\nabla_i V_j-\nabla_j V_i)$$

因而

$$\nabla_i V_j=S_{ij}+\Omega_{ij} \tag{3-108}$$

至于加速度 $\boldsymbol{a}$，可写成

$$\boldsymbol{a}=\frac{\partial v_j}{\partial t}\boldsymbol{e}^j+\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x^i}\frac{Dx^i}{Dt}$$

由
$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x^i}=(\nabla_i V_j)\boldsymbol{e}^j=\left(\frac{\partial V_j}{\partial x^i}-V_k\Gamma^k_{ij}\right)\boldsymbol{e}^j$$

于是
$$a_j=\frac{\partial V_j}{\partial t}+V^i\left(\frac{\partial V_j}{\partial x^i}-V_k\Gamma^k_{ij}\right)$$

或

$$a_j=\frac{\partial V_j}{\partial t}+V_i\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_j}{\partial x^i}+\frac{\partial V_i}{\partial x^j}-2V_k\Gamma^k_{ij}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_j}{\partial x^i}-\frac{\partial V_i}{\partial x^j}\right)\right]$$

分别令
$$S_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_j}{\partial x^i}+\frac{\partial V_i}{\partial x^j}-2V_k\Gamma^k_{ij}\right)$$

$$\Omega_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_j}{\partial x^i}-\frac{\partial V_i}{\partial x^j}\right)$$

则

$$a_j=\frac{\partial V_j}{\partial t}+V^i(S_{ij}+\Omega_{ij})\tag{3-109}$$

第十三节　二阶普遍张量的协变导数

在分析和判断二阶仿射正交张量的分布强度时，需要求得二阶仿射正交张量的导数，已在第二章中讨论过；对于斜交曲线坐标下的一阶张量(矢量)，也在前面论及。对于二阶普遍张量，即斜交曲线坐标系下的二阶张量，同样也应从协变导数求得其分布强度。

为了引出二阶普遍张量的协变导数，可先从实例出发。

由式
$$\boldsymbol{F}=P^{ij}dS_i\boldsymbol{e}_j=F^j\boldsymbol{e}_j$$

可知，如要分析邻近一点 x^i+dx^i 上的应力状态，由于

$$F^j=F^j(x^1,\ x^2,\ x^3)\quad 以及\quad \boldsymbol{e}_j=\boldsymbol{e}_j(x^1,\ x^2,\ x^3)$$

因而，要知道 $\boldsymbol{F}$ 随 x^k 的变化情况，必须求 $\boldsymbol{F}$ 对 x^k 的协变导数，即求得

$$\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial x^k}=\frac{\partial}{\partial x^k}(F^j\boldsymbol{e}_j)=\frac{\partial F^j}{\partial x^k}\boldsymbol{e}_j+F^j\frac{\partial \boldsymbol{e}_j}{\partial x^k}$$

式中 F^j 含有应力张量 P 的元素 P^{ij}，就必然涉及到二阶普遍张量元素对 x^k 的求导数问题。

在引进二阶张量协变导数之前，先回顾一下一阶普遍张量(矢量)协变导数的推导(这里所介绍的方法和前面略有不同)。

令
$$\boldsymbol{A}=A_j\boldsymbol{e}^j,\ \nabla=\boldsymbol{e}^k\frac{\partial}{\partial x^k}$$

则
$$\nabla\boldsymbol{A}=\boldsymbol{e}^k\frac{\partial}{\partial x^k}(A_j\boldsymbol{e}^j)=\boldsymbol{e}^k\boldsymbol{e}^j\frac{\partial A_j}{\partial x^k}+A_j\boldsymbol{e}^k\frac{\partial \boldsymbol{e}^j}{\partial x^k}$$

已知
$$\frac{\partial \boldsymbol{e}^j}{\partial x^k}=\left(\boldsymbol{e}_i\cdot\frac{\partial \boldsymbol{e}^j}{\partial x^k}\right)\boldsymbol{e}^i=(-\Gamma^j_{ik})\boldsymbol{e}^i$$

于是
$$\nabla\boldsymbol{A}=\boldsymbol{e}^j\boldsymbol{e}^k\frac{\partial A_j}{\partial x^k}+A_j(-\Gamma^j_{ik})\boldsymbol{e}^k\boldsymbol{e}^i$$

上式中右边第二项，“i”“j”都是求和指标，它们可以相互交换，于是上式可写成

$$\nabla\boldsymbol{A}=\boldsymbol{e}^j\boldsymbol{e}^k\frac{\partial A_j}{\partial x^k}+\boldsymbol{e}^j\boldsymbol{e}^k(-\Gamma^i_{jk})A_i$$

或

$$\nabla\boldsymbol{A}=\boldsymbol{e}^j\boldsymbol{e}^k\left(\frac{\partial A_j}{\partial x^k}-A_i\Gamma^i_{jk}\right)=\boldsymbol{e}^j(\nabla_kA_j)\boldsymbol{e}^k \tag{3-110}$$

显然，∇_kA_j 是矢量 $\boldsymbol{A}$ 协变导数的协变分量。而 $\nabla\boldsymbol{A}$ 是用以表述 $\boldsymbol{A}$ 分布强度的二阶张量，并可看成是矢量 ∇ 与矢量 $\boldsymbol{A}$ 的外积。

如令 $\boldsymbol{A}=A^j\boldsymbol{e}_j$，则

$$\nabla\boldsymbol{A}=\boldsymbol{e}^k\frac{\partial}{\partial x^k}(A^j\boldsymbol{e}_j)=\boldsymbol{e}^k\frac{\partial A^j}{\partial x^k}\boldsymbol{e}_j+\boldsymbol{e}^kA^j\frac{\partial \boldsymbol{e}_j}{e x^k}$$

由

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_j}{\partial x^k}=\left(\boldsymbol{e}^i\cdot\frac{\partial \boldsymbol{e}_j}{\partial x^k}\right)\boldsymbol{e}_i=\Gamma^i_{jk}\boldsymbol{e}_i$$

因而 $$\nabla \boldsymbol{A}=\boldsymbol{e}^k\boldsymbol{e}_j\frac{\partial A^j}{\partial x^k}+A^j\Gamma^i_{jk}\boldsymbol{e}^k\boldsymbol{e}_i$$

或 $$\nabla \boldsymbol{A}=\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}^k\left(\frac{\partial A^j}{\partial x^k}+A^i\Gamma^j_{ik}\right)$$

$$\nabla \boldsymbol{A}=\boldsymbol{e}_j(\nabla_k A^j)\boldsymbol{e}^k$$

式中 $\nabla_k A^j$——矢量 $\boldsymbol{A}$ 之协变导数的逆变分量。

因此，$\nabla \boldsymbol{A}$ 是二阶张量，又因

$$\nabla \boldsymbol{A}=\boldsymbol{e}^k\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial x_k}$$

所以，其协变分量为 $\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial x^k}$，这样，在前面称 $\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial x^k}$ 为协变导数是有根据的。

根据以上方法，将其推广到二阶乃至于更高阶的普遍张量，也将得出类似结果。下面讨论二阶普遍张量的情况。

设某二阶张量 $\Pi=\boldsymbol{e}^i\Pi_{ij}\boldsymbol{e}^j$，则

$$\nabla\Pi=\boldsymbol{e}^k\frac{\partial}{\partial x^k}(\boldsymbol{e}^i\Pi_{ij}\boldsymbol{e}^j)=\boldsymbol{e}^k\boldsymbol{e}^i\boldsymbol{e}^j\frac{\partial \Pi_{ij}}{\partial x^k}+\Pi_{ij}\boldsymbol{e}^j\boldsymbol{e}^k\frac{\partial \boldsymbol{e}^i}{\partial x^k}+\Pi_{ij}\boldsymbol{e}^k\boldsymbol{e}^i\frac{\partial \boldsymbol{e}^j}{\partial x^k}$$

但由 $$\frac{\partial \boldsymbol{e}^i}{\partial x^k}=\left(\boldsymbol{e}_h\cdot\frac{\partial \boldsymbol{e}^i}{\partial x^k}\right)\boldsymbol{e}^h,\quad \frac{\partial \boldsymbol{e}^j}{\partial x^k}=\left(\boldsymbol{e}_h\cdot\frac{\partial \boldsymbol{e}^j}{\partial x^k}\right)\boldsymbol{e}^h$$

或 $$\frac{\partial \boldsymbol{e}^i}{\partial x^k}=-\Gamma^i_{hk}\boldsymbol{e}^h,\quad \frac{\partial \boldsymbol{e}^j}{\partial x^k}=-\Gamma^j_{hk}\boldsymbol{e}^h$$

代入后可得

$$\nabla\Pi=\boldsymbol{e}^i\boldsymbol{e}^j\boldsymbol{e}^k\frac{\partial \Pi_{ij}}{\partial x^k}-\boldsymbol{e}^j\boldsymbol{e}^k\boldsymbol{e}^h\Pi_{ij}\Gamma^i_{hk}-\boldsymbol{e}^k\boldsymbol{e}^i\boldsymbol{e}^h\Pi_{ij}\Gamma^j_{hk}$$

按照同样理由，对 i、h 及 j、h 作指标交换，则得

称 $$\nabla\Pi=\boldsymbol{e}^i\boldsymbol{e}^j\boldsymbol{e}^k\left(\frac{\partial \Pi_{ij}}{\partial x^k}-\Pi_{hj}\Gamma^h_{ik}-\Pi_{ih}\Gamma^h_{jk}\right)$$

$$\frac{\partial g^j_i}{\partial x^k}=\frac{\partial \delta^j_i}{\partial x^k}=0,\quad g^h_i\Gamma^j_{hk}=\Gamma^j_{ik},\quad g^j_h\Gamma^h_{ik}=\Gamma^j_{ik}$$

$$
\left.\begin{aligned}
&\nabla_k \Pi_{ij} = \frac{\partial \Pi_{ij}}{\partial x^k} - \Pi_{hj}\Gamma^h_{ik} - \Pi_{ih}\Gamma^h_{jk} \\
&\text{为张量 } \Pi \text{ 协变导数的协变分量，同理可得} \\
&\nabla_k \Pi^{ij} = \frac{\partial \Pi^{ij}}{\partial x^k} + \Pi^{ih}\Gamma^j_{hk} + \Pi^{hj}\Gamma^i_{kh} \\
&\nabla_k \Pi^i_{\cdot j} = \frac{\partial \Pi^i_{\cdot j}}{\partial x^k} + \Pi^h_{\cdot j}\Gamma^i_{hk} - \Pi^i_{\cdot h}\Gamma^h_{jk} \\
&\nabla_k \Pi_i^{\cdot j} = \frac{\partial \Pi_i^{\cdot j}}{\partial x^k} - \Pi_h^{\cdot j}\Gamma^h_{ik} + \Pi_i^{\cdot h}\Gamma^j_{hk}
\end{aligned}\right\} \tag{3-111}
$$

式中 $\nabla_k \Pi^{ij}$、$\nabla_k \Pi^i_{\cdot j}$、$\nabla_k \Pi_i^{\cdot j}$ 分别称为协变导数的逆变分量和混合分得。

对于三阶张量，可将其协变导数的协变分量和逆变分量写出如下：

$$
\left.\begin{aligned}
&\nabla_n \Pi^{ijk} = \frac{\partial \Pi^{ijk}}{\partial x^n} + \Gamma^i_{hn}\Pi^{hjk} + \Gamma^j_{hn}\Pi^{ihk} + \Gamma^k_{hn}\Pi^{ijh} \\
&\nabla_n \Pi_{ijk} = \frac{\partial \Pi_{ijk}}{\partial x^n} - \Gamma^h_{in}\Pi_{hjk} - \Gamma^h_{jn}\Pi_{ihk} - \Gamma^h_{kn}\Pi_{ijh}
\end{aligned}\right\} \tag{3-111}'
$$

作为例子，下面来求 g_{ij}、g^{ij} 以及 $g_i^{\cdot j}$、$g^i_{\cdot j}$ 的协变导数。

(一)由式(3-111)，令 $g_{ij} = \Pi_{ij}$，于是

$$
\nabla_k \Pi_{ij} = \nabla_k g_{ij} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - g_{ih}\Gamma^h_{kj} - g_{hj}\Gamma^h_{ki} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \Gamma_{i,kj} - \Gamma_{j,ki}
$$

根据式(3-75)得

$$
\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \Gamma_{i,kj} + \Gamma_{j,ki}
$$

所以
$$
\nabla_k g_{ij} = 0
$$

(二)由式(3-111)，令 $\Pi^i_{\cdot j} = g^i_{\cdot j}$，$\Pi_i^{\cdot j} = g_i^{\cdot j}$，

由于度量张量的对称性，得

$$
g_i^{\cdot j} = g^i_{\cdot j} = g^j_i = \delta^j_i
$$

于是
$$
\nabla_k g^j_i = \frac{\partial g^j_i}{\partial x^k} + g^h_i \Gamma^j_{hk} - g^j_h \Gamma^h_{ik}
$$

因而 $$\nabla_k g_i^j = \Gamma^j_{ik} - \Gamma^j_{ik} = 0$$

(三)令 $\Pi^{ij} = g^{ij}$，同时应用式

$$g^{ij} g_{jl} = \delta^i_l$$

可得 $$\nabla_k \delta^i_l = (\nabla_k g_{jl}) g^{ij} + (\nabla_k g^{ij}) g_{jl}$$

已知 $$\nabla_k \delta^i_l = \nabla_k g_{jl} = 0,\quad 而 \quad g_{jl} \neq 0$$

所以 $$\nabla_k g^{ij} = 0$$

以上表明，度量张量在张量微分运算中有如常数一样，例如，应用上面结果可得

$$\nabla_l \Pi_i^{\cdot j} = \nabla_l (g^{jk} \Pi_{ik}) = g^{jk} \nabla_l \Pi_{ik}$$

其余类推。

不仅如此，对于三阶张量 ϵ_{ijk} 及 ϵ^{ijk} 也有类似结果，即 $\nabla_n \epsilon_{ijk}$、$\nabla_n \epsilon^{ijk}$ 均为零，现证明如下：

由 $$\epsilon_{ijk} = \sqrt{g}\, e_{ijk}$$

将上式代入式(3-111)′，得

$$\nabla_n(\sqrt{g}\, e_{ijk}) = \frac{\partial(\sqrt{g}\, e_{ijk})}{\partial x^n} - \sqrt{g}\, \Gamma^h_{in} e_{hjk}$$
$$- \sqrt{g}\, \Gamma^h_{jn} e_{ihk} - \sqrt{g}\, \Gamma^h_{kn} e_{ijh} \qquad (a)$$

显然，上式的第一项可改写为

$$\frac{(\partial \sqrt{g}\, e_{ijk})}{\partial x^n} = \sqrt{g} \frac{\partial e_{ijk}}{\partial x^n} + e_{ijk} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^n} = e_{ijk} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^n}$$

由于 $$\frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^n} = \sqrt{g}\, \Gamma^p_{pn}$$

于是 $$\frac{\partial(\sqrt{g}\, e_{ijk})}{\partial x^n} = e_{ijk} \Gamma^p_{pn} \sqrt{g}$$

这样，式(a)改写成

$$\nabla_n(\sqrt{g}\, e_{ijk}) = e_{ijk} \sqrt{g}\, \Gamma^p_{pn} - \Gamma^h_{in} \sqrt{g}\, e_{hjk}$$
$$- \Gamma^h_{jn} \sqrt{g}\, e_{ihk} - \Gamma^h_{kn} \sqrt{g}\, e_{ijh}$$

令 $i=1,\ j=2,\ k=3$，则得

$$\nabla_n(\sqrt{g}\,\varepsilon_{ijk})=\varepsilon_{123}\sqrt{g}\,\Gamma^p_{pn}-\Gamma^h_{1n}\sqrt{g}\,\varepsilon_{h23}-\Gamma^h_{3n}\sqrt{g}\,\varepsilon_{12h}$$

对 h 求和，得

$$\begin{aligned}\nabla_n(\sqrt{g}\,\varepsilon_{ijk})=&\varepsilon_{123}\sqrt{g}\,\Gamma^1_{1n}+\varepsilon_{123}\sqrt{g}\,\Gamma^2_{2n}+\varepsilon_{123}\sqrt{g}\,\Gamma^3_{3n}\\&-\Gamma^1_{1n}\sqrt{g}\,\varepsilon_{123}-\Gamma^2_{1n}\varepsilon_{223}-\Gamma^3_{1n}\sqrt{g}\,\varepsilon_{323}\\&-\Gamma^1_{2n}\sqrt{g}\,\varepsilon_{113}-\Gamma^2_{2n}\sqrt{g}\,\varepsilon_{123}-\Gamma^3_{2n}\sqrt{g}\,\varepsilon_{133}\\&-\Gamma^1_{3n}\sqrt{g}\,\varepsilon_{121}-\Gamma^2_{3n}\sqrt{g}\,\varepsilon_{122}-\Gamma^3_{3n}\sqrt{g}\,\varepsilon_{123}=0\end{aligned}$$

根据 ε_{ijk} 的性质，以上结果不失为一般性，可得

$$\nabla_n(\epsilon_{ijk})=0$$

同理可证
$$\nabla_n(\epsilon^{ijk})=0$$

第十四节　二阶普遍张量的散度

在讨论矢量的散度时曾得出，矢量的散度为标量，在讨论二阶仿射正交张量的散度时也曾得出，二阶张量的散度为一矢量，且其分量可表示成

$$(\mathrm{div}\,\Pi)_i=\frac{\partial\Pi_{ij}}{\partial y^j}$$

以此推论，二阶普遍张量的散度也应当是矢量，但其形式有差别。以 Π^{ij} 为例，求得散度表达式如下：

由微变定义式，应为

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\Pi&=e^k\frac{\partial}{\partial x^k}\cdot(e_i\Pi^{ij}e_j)\\&=e^k\cdot\left[e_i\frac{\partial\Pi^{ij}}{\partial x^k}e_j+\frac{\partial e_i}{\partial x^k}\Pi^{ij}e_j+e_i\Pi^{ij}\frac{\partial e_j}{\partial x^k}\right]\end{aligned}$$

已知

$$\frac{\partial e_i}{\partial x^k}=\left(e^h\cdot\frac{\partial e_i}{\partial x^k}\right)e_h=(\Gamma^h_{ik})e_h$$

$$\frac{\partial e_j}{\partial x^k}=\left(e^h\cdot\frac{\partial e_j}{\partial x^k}\right)e_h=(\Gamma^h_{jk})e_h$$

代入原式，得

$$\nabla\cdot\Pi=(\delta_i^k\frac{\partial\Pi_i^j}{\partial x^k}e_j+\delta_h^k\Gamma_{ik}^h e_j\Pi^{ij}+\Pi^{ij}\Gamma_{jk}^h\delta_i^k e_h)$$

将上式最后一项的"j""h"对换，则

$$\Pi^{ij}\Gamma_{jk}^h\delta_i^k e_h=\Pi^{ih}\Gamma_{hk}^j\delta_i^k e_j=\Pi^{kh}\Gamma_{hk}^j e_j$$

令 $\nabla_k\Pi^{kj}$ 为二阶普遍张量 Π 散度的逆变分量，则

$$\nabla_k\Pi^{kj}=\frac{\partial\Pi^{kj}}{\partial x^k}+\Pi^{hj}\Gamma_{hk}^k+\Pi^{kh}\Gamma_{hk}^j \tag{a}$$

已知
$$\Gamma_{ik}^k=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x^i}$$

代入上式，得

$$\nabla_k\Pi^{kj}=\frac{\partial\Pi^{kj}}{\partial x^k}+\Pi^{hj}\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x^h}+\Pi^{kh}\Gamma_{hk}^j \tag{b}$$

将第二项中的求和指标"h"改写成"k"，则得

$$\frac{\partial\Pi^{kj}}{\partial x^k}+\Pi^{kj}\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x^k}=\frac{1}{\sqrt{g}}\left[\frac{\partial(\sqrt{g}\,\Pi^{kj})}{\partial x^k}\right] \tag{c}$$

将式(c)代入式(b)，可得二阶普遍张量 Π，以 Π^{ij} 表示散度的逆变分量为

$$\nabla_k\Pi^{kj}=\frac{1}{\sqrt{g}}\left[\frac{\partial(\sqrt{g}\,\Pi^{kj})}{\partial x^k}\right]+\Pi^{kh}\Gamma_{hk}^j \tag{3-112}$$

［例题 14］ 试求柱坐标系下，应力张量 P 的散度 $\nabla\cdot P$ 的诸物理分量。

解：由式(3-112)，柱坐标系下的应力张量 P 的散度，其逆变分量应是

$$(\nabla_k P^{kr})=\frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rP^{kr})}{\partial x^k}\right]+P^{kh}\Gamma_{hk}^r$$

$$(\nabla_k P^{k\varphi})=\frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rP^{k\varphi})}{\partial x^k}\right]+P^{kh}\Gamma_{hk}^\varphi$$

$$(\nabla_k P^{kz})=\frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rP^{kz})}{\partial x^k}\right]+P^{kh}\Gamma_{hk}^z$$

已知 $x^1=r,\ x^2=\varphi,\ x^3=z$

$$\Gamma_{\varphi\varphi}^r=-r,\ \Gamma_{r\varphi}^\varphi=\Gamma_{\varphi r}^\varphi=\frac{1}{r}$$

以及 $P^{rr}=p_{rr}$, $P^{\varphi\varphi}=\frac{1}{r^2}p_{\varphi\varphi}$, $P^{r\varphi}=\frac{1}{r}p_{r\varphi}$,

$$P^{zz}=p_{zz},\ P^{\varphi z}=\frac{1}{r}p_{\varphi z},\ P^{rz}=p_{rz}$$

代入得

$$\nabla_k P^{kr}=\frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rp^{rr})}{\partial r}+\frac{\partial(rp^{\varphi r})}{\partial\varphi}+\frac{\partial(rp^{zr})}{\partial z}\right]+P^{\varphi\varphi}\Gamma^{r}_{\varphi\varphi}$$

$$\nabla_k P^{k\varphi}=\frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rp^{r\varphi})}{\partial r}+\frac{\partial(rp^{\varphi\varphi})}{\partial\varphi}+\frac{\partial(rp^{z\varphi})}{\partial z}\right]+P^{\varphi r}\Gamma^{\varphi}_{r\varphi}+P^{r\varphi}\Gamma^{\varphi}_{\varphi r}$$

$$\nabla_k P^{kz}=\frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rp^{rz})}{\partial r}+\frac{\partial(rp^{\varphi z})}{\partial\varphi}+\frac{\partial(rp^{zz})}{\partial z}\right]$$

或

$$\nabla_k P^{kr}=\frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rp_{rr})}{\partial r}+\frac{\partial(p_{\varphi r})}{\partial\varphi}+\frac{\partial(rp_{zr})}{\partial z}\right]-\frac{p_{\varphi\varphi}}{r}$$

$$\nabla_k P^{kr}=\frac{\partial p_{rr}}{\partial r}+\frac{\partial p_{\varphi r}}{r\partial\varphi}+\frac{\partial p_{zr}}{\partial z}+\frac{p_{rr}-p_{\varphi\varphi}}{r}$$

$$\nabla_k P^{k\varphi}=\frac{1}{r}\left[\frac{\partial p_{r\varphi}}{\partial r}+\frac{\partial\left(\frac{1}{r}p_{\varphi\varphi}\right)}{\partial\varphi}+\frac{\partial(p_{z\varphi})}{\partial z}\right]+\frac{p_{r\varphi}+p_{\varphi r}}{r^2}$$

$$\nabla_k P^{kz}=\frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rp_{rz})}{\partial r}+\frac{\partial(p_{\varphi z})}{\partial\varphi}+\frac{\partial(rp_{zz})}{\partial z}\right]$$

必须指出，$\nabla_k P^{kr}$、$\nabla_k P^{k\varphi}$、$\nabla_k P^{kz}$ 分别表示 $\nabla\cdot P$ 的逆变分量，要求得物理分量，应将以上各式除以$\sqrt{g^{ii}}$，即分别除以$\sqrt{g^{rr}}$、$\sqrt{g^{\varphi\varphi}}$、$\sqrt{g^{zz}}$，可得柱坐标系下 $\nabla\cdot P$ 的物理分量为

r方向： $$\frac{\partial\partial p_{rr}}{\partial r}+\frac{\partial p_{\varphi r}}{r\partial\varphi}+\frac{\partial p_{zr}}{\partial z}+\frac{p_{rr}-p_{\varphi\varphi}}{r}$$

φ 方向： $$\frac{\partial p_{r\varphi}}{\partial r}+\frac{\partial p_{\varphi\varphi}}{r\partial\varphi}+\frac{\partial p_{z\varphi}}{\partial z}+\frac{p_{r\varphi}+p_{\varphi r}}{r}$$

如系对称，则 $p_{r\varphi}+p_{\varphi r}=2p_{r\varphi}$ 于是

φ 方向： $$\frac{\partial p_{r\varphi}}{\partial r}+\frac{\partial p_{\varphi\varphi}}{r\partial\varphi}+\frac{\partial p_{z\varphi}}{\partial z}+\frac{2p_{r\varphi}}{r}$$

z 方向 $$\frac{\partial p_{rz}}{\partial r}+\frac{\partial p_{\varphi z}}{r\partial\varphi}+\frac{\partial p_{zz}}{\partial z}+\frac{p_{rz}}{r}$$

对于球坐标，类似地可得

R 方向：

$$\frac{\partial p_{RR}}{\partial R}+\frac{1}{R}\frac{\partial p_{\theta R}}{\partial\theta}+\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial p_{\varphi R}}{\partial\varphi}+\frac{1}{R}(2p_{RR}-p_{\theta\theta}-p_{\varphi\varphi}+p_{\theta R}\cot\theta)$$

θ 方向：

$$\frac{\partial p_{R\theta}}{\partial R}+\frac{1}{R}\frac{\partial p_{\theta\theta}}{\partial\theta}+\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial p_{\varphi\theta}}{\partial\varphi}+\frac{1}{R}[2p_{R\theta}+p_{\theta R}+(p_{\theta\theta}-p_{\varphi\varphi})\cot\theta]$$

φ 方向:

$$\frac{\partial p_{R\varphi}}{\partial R}+\frac{1}{R}\frac{\partial p_{\theta\varphi}}{\partial\theta}+\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial p_{\varphi\varphi}}{\partial\varphi}+\frac{1}{2}[2p_{R\varphi}+p_{\varphi R}+p_{\theta\varphi}\cot\theta]$$

[例题 15] 试求出柱坐标系下,应变率张量 S 散度的物理分量。

解: 由上例以及 S 的物理分量表达式

$$S_{rr}=\frac{\partial v_r}{\partial r},\quad S_{\varphi\varphi}=\frac{1}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{v_r}{r},\quad S_{zz}=\frac{\partial v_z}{\partial z},$$

$$S_{r\varphi}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\varphi}+\frac{\partial v_\varphi}{\partial r}-\frac{v_\varphi}{r}\right),\quad S_{rz}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_r}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)$$

$$S_{\varphi z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial\varphi}\right)$$

可得

$$\nabla_k S^{kr}=\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_r}{\partial r}\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\varphi}+\frac{\partial v_\varphi}{\partial r}-\frac{v_\varphi}{r}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}\left(r\frac{\partial v_r}{\partial z}+r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)\right]-\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{v_r}{r^2}\right)$$

$$\nabla_k S^{k\varphi}=\frac{1}{r}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{2}r\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\varphi}+\frac{\partial v_\varphi}{\partial r}-\frac{v_\varphi}{r}\right)\right]\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\frac{1}{r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{v_r}{r}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{2}r\left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial\varphi}\right)\right]\right\}$$
$$+\frac{2}{r}\left[\frac{1}{2r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\varphi}+\frac{\partial v_\varphi}{\partial r}-\frac{v_\varphi}{r}\right)\right]$$

$$\nabla_k S^{kz}=\frac{1}{r}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{2}r\left(\frac{\partial v_r}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial z}\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.+\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial\varphi}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)\right\}$$

将上式整理,即得柱坐标系下 $\nabla\cdot S$ 的物理分量为

r 方向:

$$\frac{1}{2}\left\{\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]v_r+\frac{\partial}{\partial r}(\mathrm{div}\,\boldsymbol{v})\right\}$$
$$-\frac{1}{r^2}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}-\frac{v_r}{2r^2}$$

φ 方向:

$$\frac{1}{2}\left\{\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]v_\varphi+\frac{\partial}{r\partial\varphi}(\mathrm{div}\,\boldsymbol{v})\right\}$$

$$+\frac{1}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial\varphi}-\frac{v_\varphi}{2r^2}$$

z 方向:

$$\frac{1}{2}\left\{\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]v_z+\frac{\partial}{\partial z}(\operatorname{div} \boldsymbol{v})\right\}$$

将以上三个分量分别乘以 i_r、i_φ、i_z，然后相加并注意到

$$\Delta\boldsymbol{v}=(\Delta v_r)i_r+(\Delta v_\varphi)i_\varphi+(\Delta v_z)i_z-\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{v_r}{2r^2}\right)i_r$$
$$+\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial\varphi}-\frac{v_\varphi}{2r^2}\right)i_\varphi$$

可得

$$\nabla\cdot S=\frac{1}{2}[\Delta\boldsymbol{v}+\nabla(\operatorname{div}\boldsymbol{v})]$$

以上是应用散度公式的两个实例，这两种张量都是对称张量。如果是反对称张量，由于

$$\Pi^{kh}=-\Pi^{hk},\quad \Gamma^l_{hk}=\Gamma^l_{kh}$$

所以，式(3-112)右边第二项对 h、k 求和时相互抵消，则为

$$\nabla_k\Pi^{kl}=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial(\sqrt{g}\,\Pi^{kl})}{\partial x^k}\tag{3-113}$$

第十五节　张量的商原则

在第二章中曾经讨论过二阶仿射正交张量与任意两矢量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的数性积，二阶仿射正交张量与矢量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的数性积，其结果应是标量。对于普遍张量，令

$$\boldsymbol{A}=A^i\boldsymbol{e}_i,\quad \boldsymbol{B}=B_i\boldsymbol{e}^i=B^i\boldsymbol{e}_i$$

则，二阶普遍张量 Π 与 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 的数性积亦应是标量 S，即

$$S=\boldsymbol{A}\cdot\Pi\cdot\boldsymbol{B}=A_i\boldsymbol{e}^i\cdot[\boldsymbol{e}_i\Pi^{ij}\boldsymbol{e}_j]\cdot B_j\boldsymbol{e}^j$$

于是

$$S=A_i\Pi^{ij}B_j=\Pi^{ij}A_iB_j\tag{3-114}$$

作为特例，如令 $\Pi^{ij}=g^{ij}$，则

$$S=g^{ij}A_iB_j=A^iB_j=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$$

前面已作过证明，两矢量的数性积是绝对标量。

以上讨论是在 Π^{ij} 为二阶普遍张量的元素假定下得到的，如果不知道 Π^{ij} 是否为张量 Π 的元素，但已知 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为一阶张量、S 为零阶张量，只要 Π^{ij} 满足上式，可证明 Π^{ij} 必为张量 Π 的元素，即 Π^{ij} 满足普遍张量的解析定义式。

为了具有普遍性，假定 Π 为三阶张量，其元素 Π_k^{ij}（二阶逆变、一阶协变），矢量 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$，其协变分量为 A_i、B_j，矢量 $\boldsymbol{C}$ 的逆变分量为 C^k。它们与 Π_k^{ij} 作指标缩减运算后，得

$$S=\Pi_k^{ij}A_iB_jC^k \tag{3-115}$$

令新坐标系 x^{*i} 下，为

$$S^*=\Pi_r^{*pq}A_p^*B_q^*C^{*r}$$

根据已给假定

$$S=S^*$$

以及 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 为绝对矢量，得

$$A_i=\frac{\partial x^{*p}}{\partial x^i}A_p^*,\quad B_j=\frac{\partial x^{*q}}{\partial x^j}B_q^*,\quad C^k=\frac{\partial x^k}{\partial x^{*r}}C^{*r}$$

于是
$$\Pi_r^{*pq}A_p^*B_q^*C^{*r}=\Pi_k^{ij}\left(\frac{\partial x^{*p}}{\partial x^i}\frac{\partial x^{*q}}{\partial x^j}\frac{\partial x^k}{\partial x^{*r}}\right)A_p^*B_q^*C^{*r}$$

或
$$A_p^*B_q^*C^{*r}\left[\Pi_r^{*pq}-\left(\frac{\partial x^{*p}}{\partial x^i}\frac{\partial x^{*q}}{\partial x^j}\frac{\partial x^k}{\partial x^{*r}}\right)\Pi_k^{ij}\right]=0$$

由于矢量 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 是任意选取的，为要满足上式，就必须

$$\Pi_r^{*pq}=\left(\frac{\partial x^{*p}}{\partial x^i}\frac{\partial x^{*q}}{\partial x^j}\frac{\partial x^k}{\partial x^{*r}}\right)\Pi_k^{ij}$$

Π_k^{ij} 即为三阶张量元素的解析定义式。

作为明显的例子，已知 $ds=|d\boldsymbol{r}_P|$ 为绝对标量，$d\boldsymbol{r}_P$ 为绝对矢量，由于

$$dS^2=g_{ij}dx^idx^j$$

$$\frac{d(\delta s)}{\delta s\,dt}=\nabla_i V_j\left(\frac{\delta x^i}{\delta s}\right)\left(\frac{\delta x^j}{\delta s}\right)$$

立即可得 g_{ij}、$\nabla_i V_j$ 为二阶张量。

根据以上讨论，可得商原则如下：

若对 x^i 坐标系有 3^3 个量 Π_k^{ij}，汇任意选定三个矢量分量 A_i、B_j、C^k 后，得式(3-115)，S 为不变量，则 Π_k^{ij} 为张量 Π 的二次逆变、一次协变分量。

上面通过实例引出了商原则，这一原则对更高阶张量同样适用。

下面应用商原则导出二阶普遍张量的协变导数。

由式(3-114)，可得

$$\nabla_k S=\nabla_k \Pi^{ij}(A_iB_j)+\Pi^{ij}\nabla_k(A_iB_j)$$

对于标量函数，为

$$\nabla_k S=\frac{\partial S}{\partial x^k}$$

因而

$$\nabla_k \Pi^{ij}(A_iB_j)+\Pi^{ij}\nabla_k(A_iB_j)$$
$$=\frac{\partial S}{\partial x^k}=\frac{\partial \Pi^{ij}}{\partial x^k}A_iB_j+\Pi^{ij}\frac{\partial}{\partial x^k}(A_iB_j)$$

或

$$A_iB_j\left(\nabla_k \Pi^{ij}-\frac{\partial \Pi^{ij}}{\partial x^k}\right)+\Pi^{ij}\left[\nabla_k(A_iB_j)-\frac{\partial}{\partial x^k}(A_iB_j)\right]=0 \quad (a)$$

由 $$\nabla_k(A_iB_j)=A_i\nabla_k B_j+B_j\nabla_k A_i$$

以及 $$\nabla_k B_j=\left(\frac{\partial B_j}{\partial x^k}-B_h\Gamma_{jk}^h\right)$$

$$\nabla_k A_i=\left(\frac{\partial A_i}{\partial x^k}-A_h\Gamma_{ik}^h\right)$$

可得 $$\nabla_k(A_iB_j)=\frac{\partial(A_iB_j)}{\partial x^k}-A_iB_h\Gamma_{jk}^h-A_hB_j\Gamma_{ik}^h$$

或 $$\nabla_k(A_iB_j)-\frac{\partial(A_iB_j)}{\partial x^k}=-A_iB_k\Gamma^k_{jk}-B_jA_k\Gamma^k_{ik}$$

代入式(a)，即得

$$A_iB_j\left(\nabla_k\Pi^{ij}-\frac{\partial\Pi^{ij}}{\partial x^k}\right)-[\Pi^{ij}A_iB_k\Gamma^k_{jk}+\Pi^{ij}A_kB_j\Gamma^k_{ik}]=0$$

调换上式方括弧内的两个求和指标，则

$$A_iB_j[\nabla_k\Pi^{ij}-\frac{\partial\Pi^{ij}}{\partial x^k}-\Pi^{ih}\Gamma^j_{hk}-\Pi^{hj}\Gamma^i_{hk}]=0$$

由于 **A**、**B** 是任意选取的，因而

$$\nabla_k\Pi^{ij}=\frac{\partial\Pi^{ij}}{\partial x^k}+\Pi^{ih}\Gamma^j_{hk}+\Pi^{hj}\Gamma^i_{hk}$$

同理可得其他几个式子。

以上应用商原则导出二阶普遍张量的协变导数，利用商原则还可证明

$$S=\frac{1}{2}(\Pi_{ij}+\Pi_{ji})A^iA^j=\Sigma_{ij}A^iA^j$$

式中 Σ_{ij}——对称张量的元素。

如 $S=\Pi_{ij}A^iA^j$

则 $$S=\Pi_{ij}A^iA^j=\Pi_{ji}A^jA^i=\Pi_{ji}A^iA^j$$

于是 $$2S=\Pi_{ij}A^iA^j+\Pi_{ji}A^iA^j=(\Pi_{ij}+\Pi_{ji})A^iA^j$$

$$S=\frac{1}{2}(\Pi_{ij}+\Pi_{ji})A^iA^j=\Sigma_{ij}A^iA^j$$

以上结果可由度量张量$[g_{ij}]$、变形率张量 S 加以验证。

习　　题

8-1 试由柱坐标系下的位置矢量 $\boldsymbol{r}_P$ 的表达式

$$\boldsymbol{r}_P=r\boldsymbol{l}_r+z\boldsymbol{l}_z$$

直接导出

$$d\boldsymbol{r}_P=\boldsymbol{e}_idx^i$$

式中 $\boldsymbol{i}_r$、$\boldsymbol{i}_z$ 分别为 r 方向与 z 方向的单位矢量。

8-2 试由球坐标系下的位置矢量 $\boldsymbol{r}_P$ 的表达式

$$\boldsymbol{r}_P=R\boldsymbol{i}_R$$

直接导出 $$d\boldsymbol{r}_P=\boldsymbol{e}_i dx^i$$

式中 $\boldsymbol{i}_R$ 为 R 方向的单位矢量。

8-3 试应用微元表面积的表达式

$$d\sigma_k=\sqrt{gg^{kk}}\,e_{ijk}\,dx^i dx^j dx^k \boldsymbol{i}_k$$

求得球坐标系下微元体积的各表面积。

8-4 已知速度 $\boldsymbol{v}$ 在笛卡尔坐标系下的诸分量为 $v(i)$，试求出柱坐标系下的协变分量、逆变分量和投影分量。

8-5 设 $dS^2=5(dx^1)^2+3(dx^2)^2+4(dx^3)^2-6dx^1dx^2+4dx^2dx^3$，试求
(a) g；(b) g^{ij} 并由此证明 $g_{ij}g^{jk}=\delta_i^k$

8-6 试应用指标法及斜交曲线坐标系下 ∇ 表达式，证明

$$\nabla\cdot(\phi\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}\cdot\nabla\phi+\phi\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}$$

8-7 试证明在曲线坐标系下，$\dfrac{\partial v_i}{\partial x^j}$ 不是二阶张量。设笛卡尔坐标系下，速度 $\boldsymbol{v}$ 的投影分量为 v_x、v_y、v_z，试求出柱坐标系下 $\dfrac{\partial v_i}{\partial x^j}$。

8-8 应用

$$dx^{*i}=\frac{\partial x^{*i}}{\partial x^\nu}dx^\nu$$

证明：柱坐标和球坐标之间为

$$dR=\sin\theta\,dr+\cos\theta\,dz$$

$$d\theta=\frac{\cos\theta}{R}dr-\frac{\sin\theta}{R}dz$$

$$d\varphi=d\varphi$$

并作图说明之。

8-9 试求动量密流 $\rho\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}-\boldsymbol{P}$ 的散度。

8-10 已知 $y^1=a-x^2\sin\left(\dfrac{x^1}{a}\right)$；$y^2=a-(a-x^2)\cos\left(\dfrac{x^1}{a}\right)$ $y^3=x^3$，试求 $\boldsymbol{e}_i$ 及 g_{ij}。

8-11 试证 $\boldsymbol{e}_i\times\boldsymbol{e}^i=0$。

第四章　张量分析与流体力学

近十几年来，张量分析在流体力学中的应用日益广泛。从公开出版的书籍、刊物来看，采用张量形式基本方程来求解问题与日俱增。在介绍有关张量分析的知识以后，下面再介绍一些张量分析在流体力学中的应用。

第一节　流体力学中的Lagrange语制与Euler语制

人们常常采用一种或几种方法来表述某一事物。为了正确、方便地表达这一事物，所采用的方法必须根据这一事物的具体情况来确定。

在力学中，通常采用的方法有Lagrange语制和Euler语制。为了说明问题，先对这两种语制作一介绍，然后分析它们的表述形式以及它们的转换关系。

Lagrange语制的特点是，观察者着重关注某一特定质点，当这一质点在运动时，其空间位置，各物理参数随时间的变化，观察者随该质点一起运动。

Euler语制则不同，在Euler语制下，观察者着重关注某一空间位置，观察、测定不同质点在不同时刻经过该空间位置时，质点的各物理参数。

为了较形象地说明这一点，现设想在流场中布置无数个观察者，对于Lagrange语制，这些观察者在$t=t_0$时分别位于给定的坐

标 X_i(以后统一用大写字母表示)的空间点上，随着时间的推移，他们和这一质点一起运动(这类观察者称随动观察者)，随动观察者在运动过程中，随时测定这一质点的空间位置(以 x_i 表示)及各物理参数的值，经过一段时间后，这些观察者将测定的数据加以记录整理为

$$\left.\begin{aligned} x_i &= x_i(X_1,\ X_2,\ X_3,\ t) \\ \phi &= \phi(X_1,\ X_2,\ X_3,\ t) \end{aligned}\right\} \tag{4-1}$$

当 $t=t_0$ 时的坐标 x_i 及物理参数 ϕ 应是原始坐标 X_i 和时间 t 的函数。

式中　X_i——物质坐标

　　x_i——空间坐标

上式表明，不同的质点(以 t_0 时所处的 X_i 为表征)，其运动规律可能不同，但由于运动的连续性，X_i 和 x_i 应满足一一对应的关系，即反函数

$$X_i = X_i(x_1,\ x_2,\ x_3,\ t)$$

存在且连续。要满足上述条件，则雅可比行列式

$$J=\frac{\partial(x_1,\ x_2,\ x_3)}{\partial(X_1,\ X_2,\ X_3)}$$

不应为零。

从式(4-1)及Lagrange描制的特点，可得

$$x_i = x_i(X_1,\ X_2,\ X_3,\ t_0)$$

即 $t=t_0$ 时，$x_i=X_i$。

对于Euler描制，同样假定有无数个观察者，他们分别位于流场中不同的空间位置 x_i，并静止不动，即所谓静止观察者。他们的任务是，随时测定不同质点经过他们时的各物理参数值。如果把不同时刻测定的物理参数值加以整理，则任一瞬时均可描出一物理参数的空间分布图，把这些分布图按空间位置重叠在一起，既提

供同一点上物理参数随时间的变化，也提供同一时间不同空间位置物理参数的分布，将此结果用函数表示，可认为物理参数ϕ既是空间坐标x_i的函数，也是时间t的函数，即

$$\phi=\phi(x_1,\ x_2,\ x_3,\ t) \tag{4-2}$$

由此可见，采用不同的语制可得出不同的表示形式。对于Lagrange语制，必须知道$t=t_0$时，各质点的初始位置，下面举几个实例加以说明。

［例题1］　给出质点的运动规律为

$$x_1=X_1+ktX_2,\ x_2=X_2,\ x_3=X_3$$

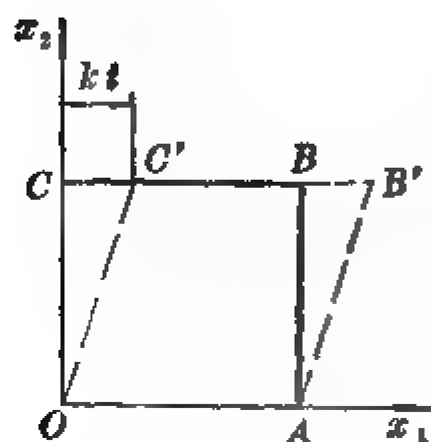


图　4-1

式中的物质坐标$(X_1,\ X_2,\ X_3)$给出$t=0$时的质点位置，如图4-1所示，设在$t=0$时取一单位正四面体$OABC$，试给出$t=t$时此正四面体的外形。

解：　当$t=0$时，$x_1=X_1$，$x_2=X_2$，$x_3=X_3$，O、A、B、C各点其坐标为

以物质坐标表示：$O(0,\ 0,\ 0)$，$A(1,\ 0,\ 0)$，$B(1,\ 1,\ 0)$，$C(0,\ 1,\ 0)$

以空间坐标表示：$O(0,\ 0,\ 0)$，$A(1,\ 0,\ 0)$，$B(1,\ 1,\ 0)$，$C(0,\ 1,\ 0)$

由x_i与X_i间的函数关系可看出，$t=0$时处于点O和点A的质点是静止不动的，由此还可推论，棱边OA也静止不动，至于CB则不同，在$t=t$瞬时为：

B'：$(1+kt,\ 1,\ 0)$，C'：$(kt,\ 1,\ 0)$

这一结果相当于线段CB平移了kt的距离；OC及AB经变形后为OC'、AB'仍是直线。

［例题2］　设某流场中的流体运动可用Lagrange语制表示成

$$x_1=X_1+X_2(e^t-1)$$
$$x_2=X_1(e^{-t}-1)+X_2$$
$$x_3=X_3$$

则其反函数可求得如下：

$$X_1=\frac{-x_1+x_2(e^t-1)}{1-e^t-e^{-t}}$$

$$X_2=\frac{x_1(e^{-t}-1)-x_2}{1-e^t-e^{-t}}$$

$$X_3=x_3$$

当然，最终目的是要求得某质点(这里是泛指的)从空间某一位置运动到另一位置时，物理参数的变化情况，为讨论方便，就先从质点的运动速度着手。

如图 4-2 所示，设某质点在 $t=t_0$时位于 P 点，其位置矢量用 r_P 表示，经当过时刻 t 以后，此质点运动到 P'，其位置矢量用 $r_{P'}$ 表示，则

$$PP'=u=r_P-r_{P'}$$

图 4-2

表示质点 t 时间内的位移，值得注意的是，式中的 r_P 及 $r_{P'}$ 既可用 X_R 表示，也可用 x_i 表示。如以 X_R 表示，则为

$$u(X_R,\ t)=r_{P'}(X_R,\ t)-r_P(X_R) \tag{4-3}$$

由质点运动速度的定义，速度 $v(X_R,\ t)$可表示成

$$v(X_R,\ t)=\left.\frac{\partial u(X_R,\ t)}{\partial t}\right|_{X_R=\text{const}}$$

由于
$$\frac{\partial r_P(X_R)}{\partial t}=0$$

因而
$$v(X_R,\ t)=\frac{\partial u(X_R,\ t)}{\partial t}=\left.\frac{\partial r_{P'}}{\partial t}\right|_{X_R=\text{const}}$$

其分量为

$$v_i(X_R,\ t)=\frac{\partial x_i(X_R,\ t)}{\partial t} \tag{4-4}$$

这就是 Lagrange 语制下，质点运动速度分量的表达式。

[例题 8]　设某物体按下列规律运动

$$x_1=X_1(1+a^2t^2),\ x_2=X_2,\ x_3=X_3$$

式中　a——常数

试求出 Lagrange 语制下的位移和运动速度。

解： 由式(4-3)，可得

$$u_1(X_R,\ t)=x_1(X_R,\ t)-X_1$$
$$u_2(X_R,\ t)=x_2(X_R,\ t)-X_2$$
$$u_3(X_R,\ t)=x_3(X_R,\ t)-X_3$$

应用已给条件，得

$$u_1=X_1a^2t^2,\ u_2=u_3=0$$

又由式(4-4)，可得

$$v_1=\left.\frac{\partial x_1}{\partial t}\right|_{X_R=\text{const}}=2a^2X_1t,\ v_2=v_3=0$$

此运动速度也可用空间坐标 x_i 表示如下：

$$v_1=\frac{2a^2x_1t}{1+a^2t^2},\ v_2=v_3=0$$

在理解以上两种表达式时，必须注意：对于前者，是表示 $t=0$ 瞬时位于 X_i 之质点经过时刻 t 后的运动速度；对于后者则是 t 瞬时位于 x_i 之质点的运动速度。

下面再来分析 Lagrange 语制下，标量函数 ϕ 对时间的全导数(变化率)。

标量函数 ϕ 既可用物质坐标 X_i 表示，也可用空间坐标 x_i 表示，例如，在例题 1 所给出的条件下，如某温度场 $T(x_i)$ 可表示成

$$T(x_i)=x_1+x_2$$

由 $$x_1=X_1+ktX_2,\ x_2=X_2$$

可得 $$T(X_i)=X_1+(kt+1)X_2$$

令 $$\phi=G(X_i,\ t)=g(x_i,\ t)$$

对于 Lagrange 语制，由于观察者跟随给定质点(以物质坐标 X_i 为表征)一起运动，因而，表征此质点物理性质的标量函数 ϕ 也将发生变化。如果以 $D\phi/Dt$ 表示标量函数 ϕ 随时间的变化率，根据 Lagrange 语制的特点，得

$$\frac{D\phi}{Dt}=\left.\frac{\partial\phi}{\partial t}\right|_{X_i=\text{const}}=\left.\frac{\partial G(X_i,\ t)}{\partial t}\right|_{X_i=\text{const}}$$

着重说明一点，此处采用 D/Dt 表示观察者跟随指定质点，这一导数记号是斯托克斯首先采用的。

至于 Lagrange 语制下的加速度 a 的表达式，完全可依此推广，写为

$$\frac{Dv_i}{Dt}=\frac{\partial^2 x_i(X_R,\ t)}{\partial t^2}\bigg|_{X_R=\text{const}}$$

综合以上讨论，可把质点看成"输运工具"，它"运载"着标量函数 ϕ 从空间一点到另外一点，而 D/Dt 即表示 ϕ 函数随时间的变化率。

由于 Euler 语制给出的是空间坐标 x_i，它在空间分布图上，给出不同瞬时、不同质点的空间位置以及这些质点所"运载"之"货物"——物理参数，因而不如 Lagrange 语制直截了当。

下面讨论 Euler 语制下，标量函数 ϕ 的变化率 $D\phi/Dt$ 表达式。

按照 Euler 语制，如果在时间间隔为 dt 的两空间分布图中各取一点，则有下列两种可能情况

1．此两空间位置并非由同一质点所占有(在不同瞬时)；

2．此两邻近点为同一质点于不同瞬时所占有。

对于前者，ϕ 函数并非同一质点"运载"的，因而其对时间的变化率不代表给定质点的 ϕ 函数之变化率，可以 $d\phi/dt$ 表示。

至于后者，由于所取的是同一质点在不同瞬时的空间位置，所以 ϕ 函数对时间的变化率可用 $D\phi/Dt$ 表示

由

$$\phi=g[x_i(X_R,\ t)]=g[x_1(X_R,\ t),\ x_2(X_R,\ t),\ x_3(X_R,\ t),\ t]$$

因而，以空间坐标表示的 $D\phi/Dt$ 可写成

$$\frac{D\phi}{Dt}=\frac{\partial g(x_i,\ t)}{\partial x_j}\frac{\partial x_j(X_R,\ t)}{\partial t}+\frac{\partial g(x_i,\ t)}{\partial t}$$

根据式(4-4)，得

$$\frac{D\phi}{Dt}=\frac{\partial\phi}{\partial x_j}v_j+\frac{\partial\phi}{\partial t} \tag{4-5}$$

速度分量 $v_i(x_1, x_2, x_3, t)$ 也可看成空间坐标的标量函数，如以 v_i 代替式(4-5)中的 ϕ，则得加速度 a 的分量

$$\frac{Dv_i}{Dt}=\frac{\partial v_i}{\partial x_j}v_j+\frac{\partial v_i}{\partial t} \tag{4-6}$$

[例题 4] 试求出上例中的加速度 a

解：由

$$v_1=2X_1a^2t=\frac{2x_1a^2t}{1+a^2t^2},\ v_2=0,\ v_3=0$$

可得 Lagrange 语制下的加速度

$$a_1=\left.\frac{\partial v_1}{\partial t}\right|_{X_i=\text{const}}=2X_1a^2=\frac{2x_1a^2}{1+a^2t^2},\ a_2=0,\ a_3=0$$

Euler 语制下的加速度

$$a_1=\frac{\partial v_1}{\partial t}+v_j\frac{\partial v_1}{\partial x_j}=\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{2x_1a^2t}{1+a^2t^2}\right]+\frac{2x_1a^2t}{1+a^2t^2}\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{2x_1a^2t}{1+a^2t^2}\right]$$

或

$$a_1=\frac{2x_1a^2}{1+a^2t^2},\ a_2=0,\ a_3=0$$

以上结果表明，两种不同语制得到的加速度是相同的。

式(4-6)在 Euler 语制中，加速度分量由 $\partial v_i/\partial t$ 和

$$v_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j}=(\boldsymbol{v}\cdot\text{grad})v_i$$

两部分组成，前者为局部加速度，后者为迁移加速度。这两部分的物理意义可分别说明如下：

在 Euler 语制中，速度分量随时间的变化率，可由某质点在 t 瞬时位于空间位置 A，而在 $t+dt$ 瞬时位于空间位置 B，此两点速度分量之差除以 dt 来表示。点 A 处的速度分量，可在 t 瞬时的空间分布图中找到；而在 B 点处同一质点的速度分量应在 $t+dt$ 瞬时的空间分布图中求得，此质点先沿假想的“t”轴，从 t 运动到 $t+dt$（注意，此时空间位置 A 不变），这一“运动”可看成自变量中只有 t 在变化，x_i 不变，因而速度分量随时间的变化率应是 $\partial v_i/\partial t$。

以上所求质点是从 t 瞬时的 A 点"运动"到 $t+dt$ 瞬时的 A 点，速度分量随时间的变化率。但实际需要的是质点从 A 到 B 的总变化率，它必须包括从 A 到 B 由于位置变化而引起的速度分量随时间的变化率。

为求得这部分加速度，可运用场论知识加以分析。

这部分加速度，就速度分布图看，它应当是在 $t+dt$ 时的速度分量分布图中，当质点以速度 $\boldsymbol{v}$ 从 A 点运动到 B 点时，速度分量随时间的变化率。

对于 $t+dt$ 时间的速度分布图，速度分量 v_i 一定是 x_i 的连续函数，即

$$v_i = v_i(x_1,\ x_2,\ x_3)$$

对于这一连续函数，总可找到该函数的等值面 $v_i=\mathrm{const}$。另外，由梯度的定义可知，$\mathrm{grad}v_i$ 必然和 $v_i=\mathrm{const}$ 垂直且指向 v_i 的增加方向（图 4-3），如果以 A 点的梯度 $\mathrm{grad}v_i$ 为直径绘一圆球，令 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{ds}=\boldsymbol{v}dt$，则得

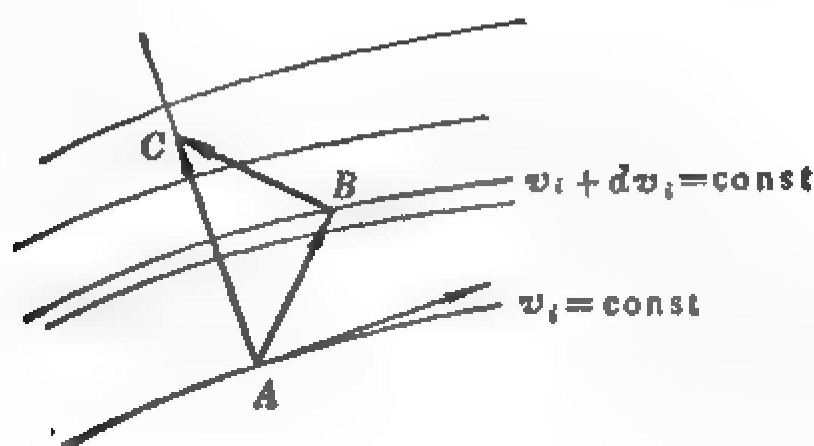


图 4-3

$$\frac{\partial v_i}{\partial s}=\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\frac{dx_j}{ds}=(\mathrm{grad}v_i)\cdot\boldsymbol{S}$$

式中 $\boldsymbol{S}$——$\boldsymbol{AB}$ 方向的单位矢量

由于 $\boldsymbol{v}$ 的方向和 $\boldsymbol{AB}$ 方向一致（这正是取指定质点的条件），

因而

$$v\frac{\partial v_i}{\partial s}=vs\cdot\text{grad}v_i=v\cdot\text{grad}v_i=(v\cdot\text{grad})v_i$$

上式就是质点以速度 v 在 v_i 的分布场中从 A 点运动到 B 点时，v_i 随时间的变化率。

对于Lagrange语制，要求知道给定质点的初始条件；而 Euler 语制给出的则是有关物理参数的场分布情况。

第二节　斜交曲线坐标系下，速度 v 的散度定义式

上一节着重讨论了力学中采用的两种研究方法，并指出，它们在分析指定之质点的运动时统一起来。在实际问题中，任何质点(或微团)总是有一定体积的，因而在分析质点运动的同时，也应当分析其体积在运动过程中的变化情况。

在附录 I 中，对笛卡尔坐标系下的微元体 δV 的相对变化率已作过讨论，并得出

$$\frac{d(\delta V)}{\delta V\,dt}=\text{div}V$$

这一定义式也适用于斜交坐标系，下面来证明这一点。

已知在斜交曲线坐标系下的微元体积为 dV，其表达式为

$$dV=\sqrt{g}\,dx^1dx^2dx^3$$

当此体积以质点的运动速度 v 作运动时，其大小、形状均将发生变化，如令

$$\frac{1}{dV}\frac{D(dV)}{Dt}$$

为此体积的相对变化率，则其表达式可求得如下：

由
$$d\boldsymbol{s}_1'=\left(\boldsymbol{e}_1+\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x^1}dt\right)dx^1$$
$$d\boldsymbol{s}_2'=\left(\boldsymbol{e}_2+\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x^2}dt\right)dx^2$$
$$d\boldsymbol{s}_3'=\left(\boldsymbol{e}_3+\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x^3}dt\right)dx^3$$

于是，变形后的体积 dV'

$$\begin{aligned}dV'&=d\boldsymbol{s}_1'\cdot(d\boldsymbol{s}_2'\times d\boldsymbol{s}_3')=\left(\boldsymbol{e}_1+\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x^1}dt\right)\\&\quad\times\left[\left(\boldsymbol{e}_2+\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x^2}dt\right)\times\left(\boldsymbol{e}_3+\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x^3}dt\right)\right]dx^1dx^2dx^3\\&=[\boldsymbol{e}_1\cdot(\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3)]dx^1dx^2dx^3+\left[\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x^1}\cdot(\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3)\right.\\&\quad\left.+\boldsymbol{e}_1\cdot\left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x^2}\times\boldsymbol{e}_3\right)+\boldsymbol{e}_1\cdot\left(\boldsymbol{e}_2\times\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x^3}\right)\right]dx^1dx^2dx^3dt\end{aligned}$$

式中 $d\boldsymbol{S}_1'$、$d\boldsymbol{S}_2'$、$d\boldsymbol{S}_3'$ 及 dV' 分别表示变形后的微元体积边长矢量和微元体积本身。注意，此处已略去 dt 的高阶小量。

但由于

$$\boldsymbol{e}_1\cdot(\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3)dx^1dx^2dx^3=\sqrt{g}\,dx^1dx^2dx^3=dV$$
$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x^1}=(\nabla_1V^k)\boldsymbol{e}_k;\ \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x^2}=(\nabla_2V^k)\boldsymbol{e}_k;\ \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x^3}=(\nabla_3V^k)\boldsymbol{e}_k$$

代入之，得

$$\begin{aligned}dV'&=dV+\{(\nabla_1V^k)\boldsymbol{e}_k\cdot(\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3)+\boldsymbol{e}_1\cdot[(\nabla_2V^k)\boldsymbol{e}_k\times\boldsymbol{e}_3]\\&\quad+\boldsymbol{e}_1\cdot[\boldsymbol{e}_2\times(\nabla_3V^k)\boldsymbol{e}_k]\}dx^1dx^2dx^3dt\end{aligned}$$

由矢量的数性三重积的性质，上式可改写成

$$dV'=dV+[\nabla_1V^1+\nabla_2V^2+\nabla_3V^3][\boldsymbol{e}_1\cdot(\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3)]dx^1dx^2dx^3dt$$

或
$$dV'=dV+(\nabla_iV^i)dV\,dt$$

令
$$D(dV)=dV'-dV$$

于是有

$$\frac{D(dV)}{dV\,dt}=\nabla_i V^i=\mathrm{div}\,\boldsymbol{v} \tag{4-7}$$

由此得证。

式(4-7)表明，div$\boldsymbol{v}$ 的定义式和笛卡尔坐标系下的定义式是一致的。这一点也正好说明 div$\boldsymbol{v}$ 为不变量。

第三节　流体力学中各种物理量的张量形式

为了应用张量来分析流体力学问题，就应当写出流体力学中可能遇到之物理量的张量形式。下面对可能遇到的物理量分别加以讨论。

（一）动能表达式

设流体质量为 m、运动速度为 $\boldsymbol{v}$，由动能定义

$$K=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})$$

以及

$$\boldsymbol{v}=V^i\boldsymbol{e}_i=V_i\boldsymbol{e}^i,\ V_i=g_{ij}V^j$$

可得

$$K=\frac{1}{2}mV^iV_i=\frac{1}{2}mg_{ij}V^iV^j \tag{4-8}$$

由于速度 $\boldsymbol{v}$ 为绝对矢量，因而动能为绝对标量。

（二）单位质量的质量力

如令单位质量的质量力为$\boldsymbol{f}$，则

$$\boldsymbol{f}=f^i\boldsymbol{e}_i=f^ig_{ij}\boldsymbol{e}^j \tag{4-9}$$

式中　f^i——$\boldsymbol{f}$的逆变分量。

（三）速度环量 Γ 的表达式

由速度环量定义，得

$$\Gamma=\oint \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{r}_P$$

已知
$$\boldsymbol{v}=V_j\boldsymbol{e}^j,\ d\boldsymbol{r}_P=\boldsymbol{e}_i dx^i$$

因而

$$\Gamma=\oint V_i(\boldsymbol{e}_j\cdot\boldsymbol{e}^i)dx^j=\oint V_i dx^i \qquad (4\text{-}10)$$

（四）质量流量 Q 的表达式

根据质量流量的定义，通过任一微元面积 $d\sigma$ 的微元质量流量应为

$$dQ=\rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,d\sigma=\rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{l}^i dS_i$$

由
$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{l}^i=v^i,\ dS_i=\sqrt{gg^{ii}}\,dx^j dx^k$$

代入上式，得
$$dQ=\rho v^i dS_i$$

展开之，得

$$dQ=\rho\sqrt{g}\,[v^1\sqrt{g^{11}}\,dx^2dx^3+v^2\sqrt{g^{22}}\,dx^1dx^3+v^3\sqrt{g^{33}}\,dx^1dx^2]$$

或

$$dQ=\rho\sqrt{g}\,[V^1 dx^2dx^3+V^2dx^1dx^3+V^3dx^1dx^2] \qquad (4\text{-}11)$$

第四节 流线及迹线表达式

流线和迹线是流体力学中重要概念，所谓流线就是在给定瞬时，由流体微团组成的曲线，在这条曲线上，每一流体微团的运动速度 $\boldsymbol{v}$ 均与该曲线相切。由这一定义出发，运用矢量的矢性积，得

$$\boldsymbol{v}\times d\boldsymbol{r}_P=0 \qquad (a)$$

式中 $d\boldsymbol{r}_P$——流线上的微元位置矢量

$\boldsymbol{v}$——该瞬时流线上流体微团的运动速度

令

$$\boldsymbol{v}=v^i\boldsymbol{e}_i,\ d\boldsymbol{r}_P=\boldsymbol{e}_j dx^j \tag{b}$$

将式(b)代入式(a)，可得

$$V^i dx^j(\boldsymbol{e}_i\times\boldsymbol{e}_j)=\varepsilon_{ijk}\sqrt{g}V^i dx^j x^k=0$$

由于上式是零矢量表达式，因而，其各分量必须为零，即

$$\left.\begin{aligned}V^1dx^2-V^2dx^1=0\\V^2dx^3-V^{3}dx^2=0\\V^3dx^1-V^1dx^3=0\end{aligned}\right\}$$

或

$$\frac{V^1}{dx^1}=\frac{V^2}{dx^2}=\frac{V^3}{dx^3} \tag{4-12}$$

对于柱坐标系，有

$$V^1=\mathrm{v}_r,\ V^2=\frac{1}{r}\mathrm{v}_\varphi,V^3=\mathrm{v}_z$$

$$dx^1=dr,\ dx^2=d\varphi,\ dx^3=dz$$

因而
$$\frac{\mathrm{v}_r}{dr}=\frac{\mathrm{v}_\varphi}{rd\varphi}=\frac{\mathrm{v}_z}{dz}$$

至于迹线亦可由定义式

$$d\boldsymbol{r}_P=\boldsymbol{v}dt$$

以及
$$d\boldsymbol{r}_P=\boldsymbol{e}_i dx^i,\ \boldsymbol{v}=v^j\boldsymbol{e}_j=V^i\boldsymbol{e}_i$$

得
$$(dx^i-V^i dt)\boldsymbol{e}_i=0$$

或

$$dx^i=V^i dt \tag{4-13}$$

对于柱坐标，则为

$$dr=\mathrm{v}_r dt,\ d\varphi=\frac{1}{r}\mathrm{v}_\varphi dt,\ dz=\mathrm{v}_z dt$$

第五节 本 构 方 程

在任意曲线坐标系下，流体的应力与应变关系式，是流体力学

的重要方程之一。为了求得这一方程，先对应力作一分析。

应用二阶张量的逆变变换式，求得斜交曲线坐标系下静压力 $-p$ 的逆变分量。

假定老坐标系为 y^i，新坐标系为 x^i。对于笛卡尔坐标系，其逆变分量即为投影分量，张量形式为

$$p_{nm}=\begin{cases}-p(n=m)\\ 0(n\neq m)\end{cases}\text{ 或 } p_{nm}=(-p)\delta_{nm} \tag{a}$$

如果令 σ^{ij} 为静压力在斜交曲线坐标系下的逆变分量，由二阶张量的逆变变换，应为

$$\sigma^{ij}=\frac{\partial x^i}{\partial y^n}\frac{\partial x^j}{\partial y^m}p_{nm} \tag{b}$$

将式(a)代入式(b)，得

$$\sigma^{ij}=\frac{\partial x^i}{\partial y^n}\frac{\partial x^j}{\partial y^n}(-p)$$

因 $\frac{\partial x^i}{\partial y^n}$、$\frac{\partial x^j}{\partial y^n}$ 分别是 $\boldsymbol{e}^i$、$\boldsymbol{e}^j$ 的对应分量，所以

$$\frac{\partial x^i}{\partial y^n}\frac{\partial x^j}{\partial y^n}=\boldsymbol{e}^i\cdot\boldsymbol{e}^j=g^{ij}$$

由此可得流体静压力的逆变分量表达式为

$$\sigma^{ij}=-pg^{ij} \tag{4-14}$$

如令 T^{ij} 为粘性流体应力的逆变分量，P^{ij} 为附加应力的逆变分量，则由流体力学知识，应为

$$T^{ij}=\sigma^{ij}+P^{ij} \tag{c}$$

对于牛顿流体，存在下列关系式

$$P^{ij}=E^{ijlm}S_{lm} \tag{d}$$

式中 E^{ijlm}——四阶各向同性张量

S_{lm}——应变率张量的协变分量。

完全模仿笛卡尔坐标系下四阶各向同性张量的表达式，应用

二阶张量的逆变变换式，将 δ_{ij} 变换为 g^{ij}，则

$$E^{ijlm}=\lambda g^{ij}g^{lm}+\mu(g^{il}g^{jm}+g^{im}g^{jl}) \tag{e}$$

将式(d)、(e)分别代入式(c)，得

$$T^{ij}=-pg^{ij}+[\lambda g^{ij}g^{lm}+\mu(g^{il}g^{jm}+g^{im}g^{jl})]S_{lm}$$

由
$$g^{lm}S_{lm}=S^m_m,\ g^{il}g^{jm}S_{lm}=S^{ij}$$
$$g^{im}g^{jl}S_{lm}=S^{ij}$$

因而

$$T^{ij}=(-p+\lambda S^m_m)g^{ij}+2\mu S^{ij} \tag{4-15}$$

将上式两边均乘以 g_{jl}，得

$$g_{jl}T^{ij}=(-p+\lambda S^m_m)g^{ij}g_{jl}+2\mu S^{ij}g_{jl}$$

或
$$T^i_l=(-p+\lambda S^m_m)g^i_l+2\mu S^i_l$$

注意到 $g^i_l=\delta^i_l$ 如令 $i=l$，则上式可改写成

$$T^i_i=(-p+\lambda S^m_m)\delta^i_i+2\mu S^i_i$$

由于 $\delta^i_i=3$，$T^i_i=-3p$[1]，则

$$-3p=-3p+3\lambda S^i_i+2\mu S^i_i$$

或
$$S^i_i(3\lambda+2\mu)=0$$

在一般情况下，S^i_i 不为零，所以

$$3\lambda+2\mu=0$$

或
$$\lambda=-\frac{2}{3}\mu$$

于是可得斜交曲线坐标系下的本构方程为

$$T^{ij}=-\left(p+\frac{2}{3}\mu S^m_m\right)g^{ij}+2\mu S^{ij} \tag{4-16}$$

如以张量表示，则

---

(1) 满足 $P^i_i=-3p$ 的流体称斯托克斯流体。

$$T=-pI+\lambda(\mathrm{div}\boldsymbol{v})I+2\mu S$$

对于斯托克斯流体，为 (4-17)

$$T=-pI-\frac{2}{3}\mu(\mathrm{div}\boldsymbol{v})I+2\mu S$$

应用以上结果，可求得柱、球坐标下应力的诸物理分量表达式如下：

对于柱坐标

$$\tau_{rr}=-p+2\mu\frac{\partial v_r}{\partial r}+\lambda\mathrm{div}\boldsymbol{v}$$

$$\tau_{\varphi\varphi}=-p+2\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{v_r}{r}\right)+\lambda\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}$$

$$\tau_{zz}=-p+2\mu\left(\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)+\lambda\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}$$

$$\tau_{r\varphi}=\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\varphi}+\frac{\partial v_\varphi}{\partial r}-\frac{v_\varphi}{r}\right)$$

$$\tau_{\varphi z}=\mu\left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial\varphi}\right)$$

$$\tau_{zr}=\mu\left(\frac{\partial v_z}{\partial r}+\frac{\partial v_r}{\partial z}\right)$$

对于球坐标

$$\tau_{RR}=-p+2\mu\frac{\partial v_R}{\partial R}+\lambda\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}$$

$$\tau_{\theta\theta}=-p+2\mu\left(\frac{1}{R}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}+\frac{v_R}{R}\right)+\lambda\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}$$

$$\tau_{\varphi\varphi}=-p+2\mu\left(\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{v_\theta}{R}\cot\theta+\frac{v_R}{R}\right)+\lambda\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}$$

$$\tau_{R\theta}=\mu\left(\frac{1}{R}\frac{\partial v_R}{\partial\theta}+\frac{\partial v_\theta}{\partial R}-\frac{v_\theta}{R}\right)$$

$$\tau_{\theta\varphi}=\mu\left(\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial\varphi}+\frac{1}{R}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\theta}-\frac{v_\varphi}{R}\cot\varphi\right)$$

$$\tau_{\varphi R}=\mu\left(\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial v_R}{\partial\varphi}+\frac{\partial v_\varphi}{\partial R}-\frac{v_\varphi}{R}\right)$$

第六节　斜交曲线坐标系下切应力互等定律

如图(4-4)所示，在流场任取一点 $P(x^1, x^2, x^3)$，以 P 点为角点，取

$$x^1=\text{const},\ x^1+dx^1=\text{const}$$
$$x^2=\text{const},\ x^2+dx^2=\text{const}$$
$$x^3=\text{const},\ x^3+dx^3=\text{const}$$

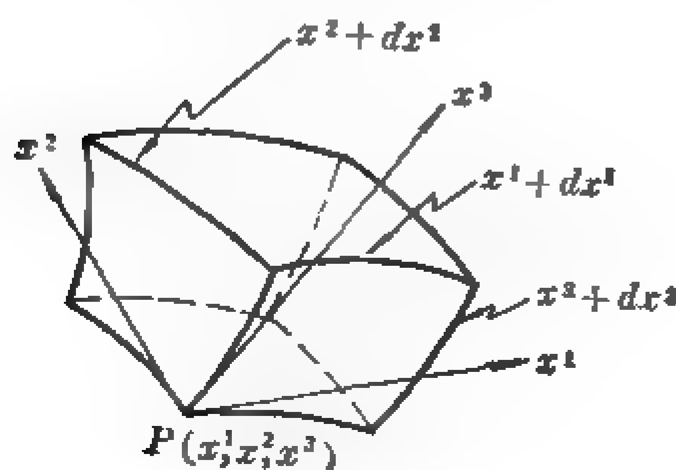


图　4-4

为棱边的斜六面体，各对应面的面积分别为

$$dS_1=|\boldsymbol{e}_2dx^2\times\boldsymbol{e}_3dx^3|=\sqrt{gg^{11}}\,dx^2\,dx^3=\sqrt{g_{22}g_{33}-g_{23}^2}\,dx^2\,dx^3$$
$$dS_2=\sqrt{g_{11}g_{33}-g_{13}^2}\,dx^1\,dx^3=\sqrt{gg^{22}}\,dx^1\,dx^3$$
$$dS_3=\sqrt{g_{11}g_{22}-g_{12}^2}\,dx^1\,dx^2=\sqrt{gg^{33}}\,dx^1\,dx^2$$

作用在过 P 点各对应面上的表面力应是

$$-\boldsymbol{T}^1dS_1,\ -\boldsymbol{T}^2dS_2,\ -\boldsymbol{T}^3dS_3$$

其中 $\boldsymbol{T}^i$ 表示作用在外法线方向为 $-\boldsymbol{l}^i$ 之微元曲面上的应力，这些应力可向基本矢量方向分解，即

$$\boldsymbol{T}^1=T^{1m}\boldsymbol{e}_m,\ \boldsymbol{T}^2=T^{2m}\boldsymbol{e}_m,\ \boldsymbol{T}^3=T^{3m}\boldsymbol{e}_m$$

而 $$T^{1m}、T^{2m}、T^{3m}$$
分别表示 $\boldsymbol{T}^1$、$\boldsymbol{T}^2$、$\boldsymbol{T}^3$ 的逆变分量，取负值则表示表面的外法线方向与倒易基本矢量方向相反。

下面求外力对点 $P(x^1, x^2, x^3)$ 的力矩方程。现假设

(一)表面力作用于各对应表面的中心；

(二)各表面沿 x^i 方向的变化对力矩的贡献可忽略不计；

(三)质量力对力矩的贡献，与表面力相比可忽略不计。

这样，表面 dS_1 上的表面力对 $P(x^1, x^2, x^3)$ 力矩的贡献应是

$$-\left[\left(\boldsymbol{e}_1dx^1+\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_2\,dx^2+\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_3\,dx^3\right)\times(T^{1m}\boldsymbol{e}_m)dS_1\right]$$

$$+\left[\frac{1}{2}(\boldsymbol{e}_2\,dx^2+\boldsymbol{e}_3\,dx^3)\times(T^{1m}\boldsymbol{e}_m)dS_1\right]$$

$$=\sqrt{g}\,\left(T^{12}\boldsymbol{e}^3-T^{13}\boldsymbol{e}^2\right)\sqrt{gg^{11}}\,dx^1\,dx^2\,dx^3$$

同理，有
$$\sqrt{g}\,(T^{23}\boldsymbol{e}^1-T^{21}\boldsymbol{e}^3)\sqrt{gg^{22}}\,dx^1\,dx^2\,dx^3$$

$$\sqrt{g}\,(T^{31}\boldsymbol{e}^2-T^{32}\boldsymbol{e}^1)\sqrt{gg^{33}}\,dx^1\,dx^2\,dx^3$$

根据假设，体积力和表面力相比为高阶无穷小，体积力对 $P(x^1, x^2, x^3)$ 的力矩贡献可忽略不计。因此得

$$(\boldsymbol{e}^3T^{12}-\boldsymbol{e}^2T^{13})\sqrt{g^{11}}+(\boldsymbol{e}^1T^{23}-\boldsymbol{e}^3T^{21})\sqrt{g^{22}}$$
$$+(\boldsymbol{e}^2T^{31}-\boldsymbol{e}^1T^{32})\sqrt{g^{33}}=0$$

或

$$\boldsymbol{e}^1(\sqrt{g^{22}}\,T^{23}-\sqrt{g^{33}}\,T^{32})+\boldsymbol{e}^2(\sqrt{g^{11}}\,T^{13}-\sqrt{g^{33}}\,T^{31})$$
$$+\boldsymbol{e}^3(\sqrt{g^{11}}\,T^{12}-\sqrt{g^{22}}\,T^{21})=0$$

由于 $\boldsymbol{e}^m$ 不为零，所以

$$\sqrt{g^{22}}\,T^{23}-\sqrt{g^{33}}\,T^{32}=0;\ \sqrt{g^{11}}\,T^{13}-\sqrt{g^{33}}\,T^{31}=0$$
$$\sqrt{g^{11}}\,T^{12}-\sqrt{g^{22}}\,T^{21}=0$$

或
$$\frac{T^{23}}{\sqrt{g^{33}}}-\frac{T^{32}}{\sqrt{g^{22}}}=0,\ \ \frac{T^{13}}{\sqrt{g^{33}}}-\frac{T^{31}}{\sqrt{g^{11}}}=0$$

$$\frac{T^{12}}{\sqrt{g^{22}}}-\frac{T^{21}}{\sqrt{g^{11}}}=0$$

由逆变分量与物理分量间的关系，令 τ^{ij} 表示对应的物理分量，则

$$\tau^{ij}=\frac{T^{ij}}{\sqrt{g^{jj}}},$$

于是

$$\tau^{23}=\tau^{32},\ \tau^{13}=\tau^{31},\ \tau^{12}=\tau^{21} \tag{4-18}$$

上式表明，切应力的物理分量互等。这就是需要证明的在斜交曲线坐标系下切应力互等定理。

第七节 连 续 方 程

在导出连续性方程时，对微元控制体的选取方式可有多种，较常用的有：(一)微元控制体静止不动；(二)微元控制体随流体一起运动。为了对连续方程的导出有较全面的了解，下面在推导此方程时分别采用这两种方法。

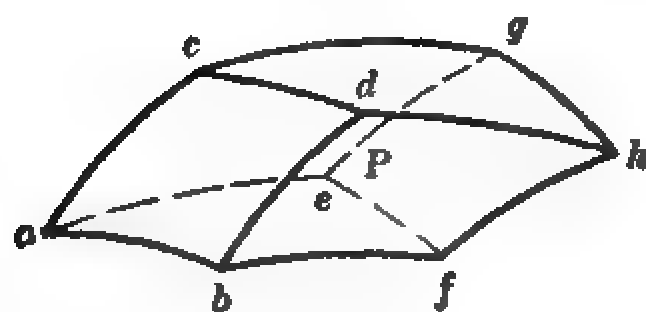


图 4-5

如图 4-5 所示，设在流场中任取一点 P，以 P 为中心取一微元斜六面体 $abcdefgh$，已如前述，微元斜六面体各边均由坐标曲线构成，并设

$$\boldsymbol{ab}=\boldsymbol{e}_1dx^1,\ \boldsymbol{ae}=\boldsymbol{e}_2dx^2,\ \boldsymbol{ac}=\boldsymbol{e}_3dx^3$$

于是，由这三条曲边构成的曲面积应是

$$\square abcd=\sqrt{gg^{22}}\,dx^1dx^3=\sqrt{G_{22}}dx^1dx^3$$

$$\square abef=\sqrt{G_{33}}dx^1dx^2$$

$$\square aceg = \sqrt{G_{11}} dx^2 dx^3$$

而微元体积则为

$$dV = \sqrt{g}\, dx^1 dx^2 dx^3$$

由于所取的是微元控制体，上述各曲面上的流动参数（如速度 $\boldsymbol{v}$、密度 ρ 等）均可用点 a 处的流动参数代替，因此，由 $\square abcd$ 在 dt 内进入控制体的流体质量，应为

$$\rho \mathrm{v}^2 \sqrt{G_{22}} dx^1 dx^3 dt$$

式中 v^2——速度 $\boldsymbol{v}$ 的逆变物理分量。

由 $\square efgh$ 在 dt 内流出控制体的流体质量为

$$\left[\rho \mathrm{v}^2 \sqrt{G_{22}} + \frac{\partial}{\partial x^2}(\rho \mathrm{v}^2 \sqrt{G_{22}}) dx^2\right] dx^1 dx^3 dt$$

因而，在 dt 内沿 x^2 方向净流出控制体的流体质量为

$$\frac{\partial}{\partial x^2}(\rho \mathrm{v}^2 \sqrt{G_{22}}) dx^1 dx^2 dx^3 dt$$

同理，可得 dt 内沿 x^1、x^3 方向净流出控制体的流体质量为

$$\frac{\partial}{\partial x^1}(\rho \mathrm{v}^1 \sqrt{G_{11}}) dx^1 dx^2 dx^3 dt$$

$$\frac{\partial}{\partial x^3}(\rho \mathrm{v}^3 \sqrt{G_{33}}) dx^1 dx^2 dx^3 dt$$

于是，在 dt 内以控制体中净流出质量是

$$\left[\frac{\partial(\rho \mathrm{v}^1 \sqrt{G_{11}})}{\partial x^1} + \frac{\partial(\rho \mathrm{v}^2 \sqrt{G_{22}})}{\partial x^2} + \frac{\partial(\rho \mathrm{v}^3 \sqrt{G_{33}})}{\partial x^3}\right] \times dx^1 dx^2 dx^3 dt$$

式中 $G_{11} = gg^{11}$, $G_{22} = gg^{22}$, $G_{33} = gg^{33}$。

由于控制体的体积不变，所以流出一部分流体必将引起控制体内部密度的变化。假设控制体内密度的变化率为

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

则在 dt 内，控制体中流体质量改变

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}dV\,dt=\frac{\partial\rho}{\partial t}\sqrt{g}\,dx^1\,dx^2\,dx^3\,dt$$

根据质量守恒定律，应为

$$\frac{\partial(\rho V^1\sqrt{G_{11}})}{\partial x^1}+\frac{\partial(\rho V^2\sqrt{G_{22}})}{\partial x^2}+\frac{\partial(\rho V^3\sqrt{G_{33}})}{\partial x^3}$$

$$=-\frac{\partial\rho}{\partial t}\sqrt{g}$$

或 $(v^i\sqrt{g^{ii}}=V^i)$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial(\rho\sqrt{g}\,V^i)}{\partial x^i}=0 \tag{4-19}$$

上式即为斜交曲线坐标系下的连续方程。在导出这一方程时，假设控制体静止不动。如假定控制体和流体一起以相同速度 $\boldsymbol{v}$ 运动，则控制体内的系统和控制体外的流体无相对运动，即没有流体质量进出控制体。根据质量守恒定律，应有

$$\frac{D(\rho dV)}{Dt}=0$$

或

$$\frac{D\rho}{Dt}dV+\rho\frac{D(dV)}{Dt}=0$$

$$\frac{D\rho}{Dt}+\rho\frac{D(dV)}{dV\,dt}=0 \tag{a}$$

已知

$$\frac{D\rho}{Dt}=\frac{\partial\rho}{\partial t}+V^i\frac{\partial\rho}{\partial x^i},$$

$$\frac{D(dV)}{dV\,dt}=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial(\sqrt{g}\,V^i)}{\partial x^i}=\mathrm{div}\boldsymbol{v}$$

所以，式(a)左面可改写为

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+V^i\frac{\partial\rho}{\partial x^i}+\frac{\rho}{\sqrt{g}}\frac{\partial(\sqrt{g}\,V^i)}{\partial x^i}$$

$$=\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{1}{\sqrt{g}}\left[\sqrt{g}V^i\frac{\partial\rho}{\partial x^i}+\rho\frac{\partial(\sqrt{g}V^i)}{\partial x^i}\right]$$

$$=\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial(\rho\sqrt{g}V^i)}{\partial x^i}$$

于是可得连续方程为

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial(\rho\sqrt{g}V^i)}{\partial x^i}=0 \qquad (4\text{-}19)'$$

这一结果表明，两种不同方法得出同一方程。

第八节　以应力表示的运动微分方程

在第三章中已讨论了一点的应力表达式，由式(3-101)得

$$\boldsymbol{p}^n d\sigma=\boldsymbol{p}^i dS_i$$

式中 $\boldsymbol{p}^i$——作用于对应之微元坐标曲面上的应力；

dS_i——该曲面的面积。

已知
$$dS_i=\frac{1}{2}\sqrt{gg^{ii}}\,dx^j\,dx^k=\frac{1}{2}\sqrt{G_{ii}}\,dx^j\,dx^k$$

于是
$$\boldsymbol{p}^i dS_i=\frac{1}{2}\boldsymbol{p}^i\sqrt{g^{ii}}(\sqrt{g}\,dx^j\,dx^k)$$

应用以上结果，可推导出斜交曲线坐标系下运动微分方程。

设在流场中任取一点 O，以 O 点为角点、过 O 点之坐标曲线 $x^i=\text{const}$ 以及 $x^i+dx^i=\text{const}$ 为斜棱边构成微元六面体（见图4-6）。则过点 O 各对应的曲面面积，对所取的微元六面体而言，应是

$$dS_i=\sqrt{gg^{ii}}\,dx^j\,dx^k$$

而作用在对应曲面上的表面力则为

$$-\boldsymbol{p}^1\sqrt{gg^{11}}\,dx^2\,dx^3,\ -\boldsymbol{p}^2\sqrt{gg^{22}}\,dx^1\,dx^3$$
$$-\boldsymbol{p}^3\sqrt{gg^{33}}\,dx^1\,dx^2$$

式中 $\boldsymbol{p}^i$——作用于对应面上的应力

为讨论方便，令

$$p^i\sqrt{g^{ii}}=T^{ik}e_k$$

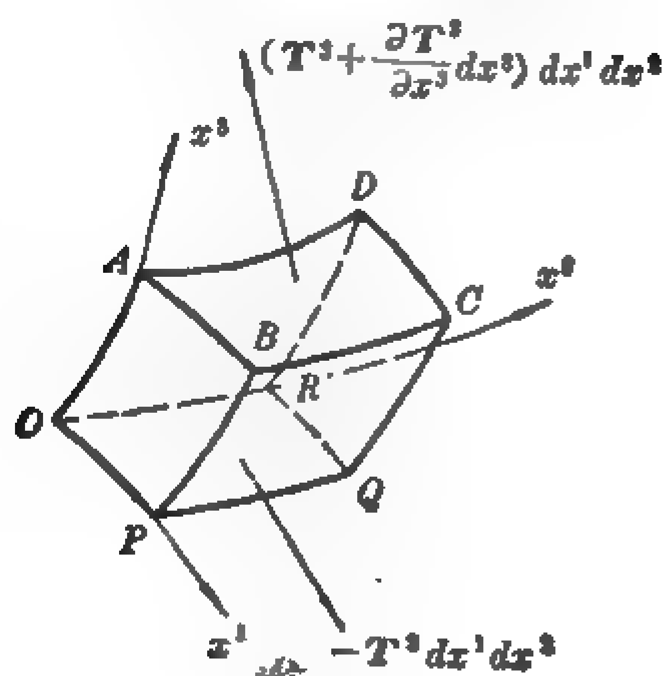


图 4-6

即 T^{ik} 作为 $p^i\sqrt{g^{ii}}$ 的逆变分量，于是

$$p^i=\frac{T^{ik}}{\sqrt{g^{ii}}}e_k$$

再令 $p^{(k)}$ 为 p^i 的可分解分量的绝对值，则由上式

$$p^i=\frac{T^{ik}}{\sqrt{g^{ii}}}\sqrt{g_{kk}}\,l_k=p^{ik}l_k$$

得
$$p^{ik}=\sqrt{\frac{g_{kk}}{g^{ii}}}\,T^{ik}$$

为使表面力的表示形式和笛卡尔坐标相一致，再令

$$T^i=p^i\sqrt{gg^{ii}}=\sqrt{g}\,T^{ik}e_k$$

于是诸表面力可改写成

$$-T^1dx^2dx^3,\ -T^2dx^1dx^3,\ -T^3dx^1dx^2$$

而作用在六个面上之表面力的合力应为

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^1}(T^1)+\frac{\partial}{\partial x^2}(T^2)+\frac{\partial}{\partial x^3}(T^3)\right]dx^1dx^2dx^3$$

$$=\frac{\partial \boldsymbol{T}^i}{\partial x^i}dx^1dx^2dx^3$$

令作用在微元流体上的质量力为

$$\rho \boldsymbol{f}dV=\rho \boldsymbol{f}\sqrt{g}\,dx^1dx^2dx^3$$

根据牛顿第二运动定律，可得

$$\frac{\partial}{\partial x^i}(\boldsymbol{T}^i)dx^1dx^2dx^3+\rho\sqrt{g}\,\boldsymbol{f}dx^1dx^2dx^3$$

$$=\rho\sqrt{g}\frac{D\boldsymbol{v}}{Dt}dx^1dx^2dx^3$$

或
$$\frac{\partial \boldsymbol{T}^i}{\partial x^i}+\rho\sqrt{g}\,\boldsymbol{f}=\rho\sqrt{g}\frac{D\boldsymbol{v}}{Dt}$$

式中 $D\boldsymbol{v}/Dt$——加速度。

由于
$$\boldsymbol{T}^i=\sqrt{g}\,T^{ik}\boldsymbol{e}_k$$

因而

$$\frac{\partial \boldsymbol{T}^i}{\partial x^i}=T^{ik}\boldsymbol{e}_k\frac{\partial}{\partial x^i}\sqrt{g}+\sqrt{g}\,\boldsymbol{e}_k\frac{\partial T^{ik}}{\partial x^i}+\sqrt{g}\,T^{ik}\frac{\partial \boldsymbol{e}_k}{\partial x^i}$$

已知
$$\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x^i}=\Gamma^p_{pi}\sqrt{g}\,;\quad \frac{\partial \boldsymbol{e}_k}{\partial x^i}=\Gamma^l_{ki}\boldsymbol{e}_l$$

于是
$$\frac{\partial \boldsymbol{T}^i}{\partial x^i}=\sqrt{g}\,\boldsymbol{e}_k\left[\frac{\partial T^{ik}}{\partial x^i}+\Gamma^p_{pi}T^{ik}+\Gamma^k_{ij}T^{ij}\right]$$

由于
$$\frac{\partial T^{ik}}{\partial x^i}+\Gamma^p_{ip}T^{ik}+T^{ij}\Gamma^k_{ij}=\nabla_iT^{ik}$$

所以可得任意曲线坐标系下的运动微分方程为

$$\nabla_iT^{ik}+\rho f^k=\rho a^k \tag{4-20}$$

又因
$$\nabla_iT^{ik}=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^i}(\sqrt{g}\,T^{ik})+\Gamma^k_{ij}T^{ij}$$

则上式又可改写成

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^i}(\sqrt{g}\,T^{ik})+T^{ij}\Gamma^k_{ij}+\rho f^k=\rho a^k \tag{4-20$'$}$$

对于正交的曲线坐标系，由于可分解分量即为物理分量，且

$$g^{ii}=\frac{1}{g_{ii}}$$

因此，物理分量 p^{ik}、$f(k)$、$a(k)$ 分别可表示成

$$p_{ik}=p^{(ik)}=\sqrt{g_{ii}g_{kk}}\,T^{ik}$$

$$f(k)=\sqrt{g_{kk}}\,f^{k}$$

$$a(k)=\sqrt{g_{kk}}\,a^{k}$$

代入式(4-20)即得正交曲线坐标系下的运动微分方程

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^{i}}\left[\frac{p_{ik}}{\sqrt{g_{ii}g_{kk}}}\sqrt{g}\right]+\Gamma^{k}_{ij}\frac{p_{ij}}{\sqrt{g_{ii}g_{jj}}}+\rho\frac{f(k)}{\sqrt{g_{kk}}}$$

$$=\rho\frac{a(k)}{\sqrt{g_{kk}}} \tag{4-21}$$

对于柱坐标系，上式可改写为

$$\frac{1}{r}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{p_{rr}}{\sqrt{g_{rr}g_{rr}}}r\right]+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\frac{p_{\varphi r}}{\sqrt{g_{\varphi\varphi}g_{rr}}}r\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{p_{zr}}{\sqrt{g_{zz}g_{rr}}}r\right]\right\}$$

$$+\Gamma^{r}_{\varphi\varphi}\frac{p_{\varphi\varphi}}{\sqrt{g_{\varphi\varphi}g_{\varphi\varphi}}}+\rho\frac{f(r)}{\sqrt{g_{rr}}}=\rho\frac{a(r)}{\sqrt{g_{rr}}}$$

$$\frac{1}{r}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{p_{r\varphi}}{\sqrt{g_{\varphi\varphi}g_{rr}}}r\right]+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\frac{p_{\varphi\varphi}}{\sqrt{g_{\varphi\varphi}g_{\varphi\varphi}}}r\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{p_{z\varphi}}{\sqrt{g_{\varphi\varphi}g_{zz}}}r\right]\right\}$$

$$+\Gamma^{\varphi}_{\varphi r}\frac{p_{\varphi r}}{\sqrt{g_{\varphi\varphi}g_{rr}}}+\Gamma^{\varphi}_{r\varphi}\frac{p_{r\varphi}}{\sqrt{g_{rr}g_{\varphi\varphi}}}+\rho\frac{f(\varphi)}{\sqrt{g_{\varphi\varphi}}}=\rho\frac{a(\varphi)}{\sqrt{g_{\varphi\varphi}}}$$

$$\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\frac{p_{rz}}{\sqrt{g_{rr}g_{zz}}}r\right]+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\frac{p_{\varphi z}}{\sqrt{g_{\varphi\varphi}g_{zz}}}r\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{p_{zz}}{\sqrt{g_{zz}g_{zz}}}r\right]\right\}$$

$$+\rho\frac{f(z)}{\sqrt{g_{zz}}}=\rho\frac{a(z)}{\sqrt{g_{zz}}}$$

由 $$\sqrt{g_{rr}}=1,\ \sqrt{g_{\varphi\varphi}}=r,\ \sqrt{g_{zz}}=1,\ \sqrt{g}=r$$

$$\Gamma^{r}_{\varphi\varphi}=-r,\ \Gamma^{\varphi}_{\varphi r}=\Gamma^{\varphi}_{r\varphi}=\frac{1}{r}$$

可得

$$\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rp_{rr})+\frac{\partial}{\partial\varphi}(p_{\varphi r})+\frac{\partial}{\partial z}(rp_{zr})\right]+(-r)\frac{p_{\varphi\varphi}}{r^2}$$

$$+\rho f(r)=a(r)$$

$$\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(p_{r\varphi})+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{p_{\varphi\varphi}}{r}\right)+\frac{\partial}{\partial z}(p_{z\varphi})\right]+\frac{p_{\varphi r}}{r^2}+\frac{p_{r\varphi}}{r^2}$$

$$+\rho\frac{f(\varphi)}{r}=\rho\frac{a(\varphi)}{r}$$

$$\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rp_{rz})+\frac{\partial}{\partial\varphi}(p_{\varphi z})+\frac{\partial}{\partial z}(rp_{zz})\right]+\rho f(z)=\rho a(z)$$

化简之,并由

$$a(r)=\frac{D^2r}{Dt}-\frac{1}{r}v_\varphi^2,\ a(\varphi)=\frac{D^2\varphi}{Dt^2}+\frac{2v\ v_\varphi}{r},\ a(z)=\frac{D^2z}{Dt^2}$$

可得($p_{r\varphi}=p_{\varphi r}$)

$$\left.\begin{aligned}
&\rho\left[\frac{D^2r}{Dt^2}-\frac{v_\varphi^2}{r}\right]=\rho f(r)+\frac{\partial p_{rr}}{\partial r}+\frac{\partial p_{\varphi r}}{r\partial\varphi}+\frac{\partial p_{zr}}{\partial z}+\frac{p_{rr}-p_{\varphi\varphi}}{r}\\
&\rho\left[\frac{D^2\varphi}{Dt}+\frac{2v_rv_\varphi}{r}\right]=\rho f(\varphi)+\frac{\partial p_{r\varphi}}{\partial r}+\frac{\partial}{r\partial\varphi}(p_{\varphi\varphi})+\frac{\partial}{\partial z}(p_{z\varphi})\\
&\qquad\qquad+\frac{2p_{r\varphi}}{r}\\
&\rho\frac{D^2z}{Dt^2}=\rho f(z)+\frac{\partial p_{rz}}{\partial r}+\frac{\partial p_{\varphi z}}{r\partial\varphi}+\frac{\partial p_{zz}}{\partial z}
\end{aligned}\right\}\tag{4-22}$$

注意:上式应用了切应力互等定理,$p_{r\varphi}=p_{\varphi r}$

至于球坐标,亦可类似地求得如下:

$$\rho a(R)=\frac{\partial p_{RR}}{\partial R}+\frac{1}{R}\frac{\partial p_{\theta R}}{\partial\theta}+\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial p_{\varphi R}}{\partial\varphi}$$

$$+\frac{1}{R}[2p_{RR}-p_{\theta\theta}-p_{\varphi\varphi}+p_{\theta R}\cot\varphi]+\rho f(R)$$

$$\rho a(\theta)=\frac{\partial p_{R\theta}}{\partial R}+\frac{1}{R}\frac{\partial p_{\theta\theta}}{\partial\theta}+\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial p_{\varphi\theta}}{\partial\varphi}$$

$$+\frac{1}{R}[2p_{R\theta}+p_{\theta R}+(p_{\theta\theta}-p_{\varphi\varphi})\cot\theta]+\rho f(\theta)$$

$$\rho a(\varphi)=\frac{\partial p_{R\varphi}}{\partial R}+\frac{1}{R}\frac{\partial p_{\theta\varphi}}{\partial\theta}+\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial p_{\varphi\varphi}}{\partial\varphi}$$

$$+\frac{1}{2}[2p_{R\varphi}+p_{\varphi R}+p_{\theta\varphi}\cot\theta]+\rho f(\varphi) \qquad (4\text{-}22)'$$

第九节 斜交曲线坐标系下，气体动力学基本方程的守恒形式

第三章已经讨论过正交条件下流体力学基本方程的守恒形式，本节将讨论更为普遍的情况。

(一) 连续方程

对于连续方程，不必作其他处理，只须假设 $\partial\sqrt{g}/\partial t=0$，即可得出其守恒型式。由式(4-19)得

$$\frac{\partial(\rho\sqrt{g})}{\partial t}+\frac{\partial(\rho\sqrt{g}V^i)}{\partial x^i}=0 \qquad (4\text{-}23)$$

(二) 运动微分方程的守恒形式

为便于讨论，先将运动微分方程

$$\rho\frac{D\boldsymbol{v}}{Dt}=\nabla\cdot\boldsymbol{T}$$

改写。注意，此处忽略 $\boldsymbol{f}$ 不计。

首先，应用连续方程将 $\frac{D\boldsymbol{v}}{Dt}$ 改写为

$$\rho\frac{D\boldsymbol{v}}{Dt}=\rho\left[\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}\right]+\boldsymbol{v}\left[\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v})\right]$$

$$=\frac{\partial(\rho\boldsymbol{v})}{\partial t}+\rho(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v})$$

于是，有 $$\frac{\partial(\rho\boldsymbol{v})}{\partial t}+\rho(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v})=\nabla\cdot\boldsymbol{T}$$

或

$$\frac{\partial(\rho V^j e_j)}{\partial t}+\left(\rho V^i\frac{\partial}{\partial x^i}\right)V^j e_j+V^j e_j\left[\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial(\rho\sqrt{g}V^i)}{\partial x^i}\right]$$

$$=(\nabla_i T^{ij})e_j$$

展开之，得$\left(\frac{\partial e_j}{\partial t}=0\right)$

$$\frac{\partial(\rho V^j)}{\partial t}e_j+\rho V^i\frac{\partial V^j}{\partial x^i}e_j+\rho V^i V^j\frac{\partial e_j}{\partial x^i}$$

$$+V^j e_j\left[\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial(\rho\sqrt{g}V^i)}{\partial x^i}\right]=(\nabla_i T^{ij})e_j$$

将上式与e^k作数性积，并利用$e^k\cdot e_j=\delta^k_j$，则上式可改写成

$$\frac{\partial(\rho V^k)}{\partial t}+\rho V^i\frac{\partial V^k}{\partial x^i}+\rho V^i V^j\left(e^k\cdot\frac{\partial e_j}{\partial x^i}\right)$$

$$+V^k\left[\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial(\rho\sqrt{g}V^i)}{\partial x^i}\right]=\nabla_i T^{ik}$$

$$e^k\cdot\frac{\partial e_j}{\partial x^i}=\Gamma^k_{ij}$$

$$\nabla_i T^{ik}=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial(\sqrt{g}T^{ik})}{\partial x^i}+T^{ik}\Gamma^k_{ik}$$

代入之，得

$$\frac{\partial(\rho V^k)}{\partial t}+\rho V^i\frac{\partial v^k}{\partial x^i}+V^k\left[\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial(\rho\sqrt{g}v^i)}{\partial x^i}\right]$$

$$-\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial(\sqrt{g}T^{ik})}{\partial x^i}+\rho V^i V^j\Gamma^k_{ij}-T^{ik}\Gamma^k_{ik}=0$$

上式乘以$\sqrt{g}$后加以整理，可得$(\partial\sqrt{g}/\partial t=0)$

$$\frac{\partial(\sqrt{g}\rho V^k)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho\sqrt{g}V^i V^k)}{\partial x^i}-\frac{\partial(\sqrt{g}T^{ik})}{\partial x^i}$$

$$+\rho\sqrt{g}V^i V^j\Gamma^k_{ij}-\sqrt{g}T^{ik}\Gamma^k_{ik}=0 \qquad (4\text{-}24)$$

上式为运动微分方程的弱守恒型式。

如果是理想气体，则

$$\frac{\partial(\rho \boldsymbol{v})}{\partial t}+\rho(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v})=-\nabla p$$

或

$$\frac{\partial(\rho V^j)}{\partial t}\boldsymbol{e}_j+\rho\left(V^i\frac{\partial}{\partial x^i}\right)V^j\boldsymbol{e}_j+V^j\boldsymbol{e}_j\left[\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial(\sqrt{g}\,\rho V^i)}{\partial x^i}\right]$$

$$=-g^{ij}\frac{\partial p}{\partial x^i}\boldsymbol{e}_j$$

于是

$$\frac{\partial(\rho V^j)}{\partial t}\boldsymbol{e}_j+\rho V^i\frac{\partial V^j}{\partial x^i}\boldsymbol{e}_j+\rho V^iV^j\frac{\partial \boldsymbol{e}_j}{\partial x^i}+V^j\left[\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial(\sqrt{g}\,\rho V^i)}{\partial x^i}\right]\boldsymbol{e}_j$$

$$=-g^{ij}\frac{\partial p}{\partial x^i}\boldsymbol{e}_j$$

$$\boldsymbol{e}_j\frac{\partial(\rho V^j)}{\partial t}+\frac{1}{\sqrt{g}}\left[\sqrt{g}\,\rho V^i\frac{\partial V^j}{\partial x^i}+V^j\frac{\partial(\sqrt{g}\,\rho V^i)}{\partial x^i}\right]\boldsymbol{e}_j$$

$$+\rho V^iV^j\left(\boldsymbol{e}_k\cdot\frac{\partial \boldsymbol{e}_j}{\partial x^i}\right)\boldsymbol{e}_k=-g^{ij}\frac{\partial p}{\partial x^i}\boldsymbol{e}_j$$

将等式左边“j”与“k”对换，将第二项、第三项合并，得

$$\frac{\partial(\rho V^j)}{\partial t}+\frac{1}{\sqrt{g}}\left[\frac{\partial(\sqrt{g}\,\rho V^iV^j)}{\partial x^i}\right]+\rho V^iV^k\Gamma^j_{ik}=-g^{ij}\frac{\partial p}{\partial x^i}$$

或

$$\frac{\partial(\sqrt{g}\,\rho V^j)}{\partial t}+\frac{\partial(\sqrt{g}\,\rho V^iV^j)}{\partial x^i}+\sqrt{g}\,\rho V^iV^k\Gamma^j_{ik}$$

$$=-\sqrt{g}\,g^{ij}\frac{\partial p}{\partial x^i}$$

由 $$\frac{\partial}{\partial x^i}(\sqrt{g}\,g^{ij}p)=\sqrt{g}\,g^{ij}\frac{\partial p}{\partial x^i}+p\frac{\partial(\sqrt{g}\,g^{ij})}{\partial x^i}$$

代入上式，得

$$\frac{\partial(\sqrt{g}\,\rho V^j)}{\partial t}+\frac{\partial(\sqrt{g}\,\rho r^i V^j)}{\partial x^i}+\frac{\partial}{\partial x^i}(\sqrt{g}\,g^{ij}p)$$

$$=p\frac{\partial(\sqrt{g}\,g^{ij})}{\partial x^i}-\sqrt{g}\,\rho V^i V^k \Gamma^j_{ik}$$

或

$$\frac{\partial(\sqrt{g}\,\rho V^j)}{\partial t}+\frac{\partial[\sqrt{g}\,(g^{ij}p+\rho V^i V^j)]}{\partial x^i}$$

$$=p\frac{\partial(\sqrt{g}\,g^{ij})}{\partial x^i}-\sqrt{g}\,\rho V^i V^k \Gamma^j_{ik}\text{[1]} \qquad (4\text{-}25)$$

上式为理想气体的弱守恒型运动微分方程。

对于柱坐标系，如令$\sqrt{g}=r$, $g^{rr}=1$, $g^{\varphi\varphi}=\frac{1}{r^2}$, $g^{zz}=1$, $V^r=v_r$, $V^\varphi=v_\varphi\frac{1}{r}$,

$$V^z=v_z,\ \Gamma^r_{\varphi\varphi}=-r,\ \Gamma^\varphi_{r\varphi}=\frac{1}{r}$$

可得

---

[1] 这一方程也可将速度 $\boldsymbol{v}$ 向倒易基本矢量 $\boldsymbol{e}^i$ 方向分解，然后导出如下：

令 $\boldsymbol{v}=V_j\boldsymbol{e}^j$，则运动微分方程

$$\frac{\partial(\rho V_j\boldsymbol{e}^j)}{\partial t}+\left(\rho V^i\frac{\partial}{\partial x^i}\right)V_j\boldsymbol{e}^j+V_j\boldsymbol{e}^j\left[\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial(\rho V^i\sqrt{g})}{\partial x^i}\right]+\frac{\partial p}{\partial x^i}\boldsymbol{e}^i=0$$

将上式与 $\boldsymbol{e}_k$ 作数性积，得

$$\frac{\partial(\rho V_k)}{\partial t}+\left(\rho V^i\frac{\partial V_k}{\partial x^i}\right)+\rho V^i V_j\left(\boldsymbol{e}_k\cdot\frac{\partial \boldsymbol{e}^j}{\partial x^i}\right)$$

$$+V_k\left[\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial(\rho V^i\sqrt{g})}{\partial x^i}\right]+\frac{\partial p}{\partial x^k}=0$$

令

$$\boldsymbol{e}_k\cdot\frac{\partial \boldsymbol{e}^j}{\partial x^i}=-\Gamma^j_{ik},\quad \frac{\partial p}{\partial x^k}=\delta_{ik}\frac{\partial p}{\partial x^i},\quad \frac{\partial\sqrt{g}}{\partial t}=0$$

$$\rho V^i\frac{\partial V_k}{\partial x^i}+\frac{1}{\sqrt{g}}V_k\frac{\partial(\rho V^i\sqrt{g})}{\partial x^i}=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial(\rho V^i V_k\sqrt{g})}{\partial x^i}$$

则

$$\frac{\partial(\sqrt{g}\,\rho V_k)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho V^i V_k\sqrt{g}+\delta_{ik}p\sqrt{g})}{\partial x^i}=p\delta_{ik}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x^i}+\rho\sqrt{g}\,V^i V_j\Gamma^j_{ik}$$

$$
\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial(r\rho v_r)}{\partial t}+\frac{\partial[r(p+\rho v_r^2)]}{\partial r}+\frac{\partial(\rho v_\varphi v_r)}{\partial\varphi}+\frac{\partial(r\rho v_z v_r)}{\partial z}\\
&\quad=p+\rho v_\varphi^2\\
&\frac{\partial(r^2\rho v_\varphi)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial r}(r^2\rho v_r v_\varphi)+\frac{\partial}{\partial\varphi}[r(p+\rho v_\varphi^2)]+\\
&\quad\frac{\partial}{\partial z}[r^2(\rho v_z v_\varphi)]=0\\
&\frac{\partial(r\rho v_z)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial r}(\partial\rho v_z v_r)+\frac{\partial}{\partial\varphi}(\rho v_\varphi v_z)+\frac{\partial}{\partial z}[(p+\rho v_z^2)r]\\
&\quad=0
\end{aligned}\right\}
\tag{4-26}
$$

对于笛卡尔坐标系，令$\sqrt{g}=1$, $g^{11}=g^{22}=g^{33}=1$, $g^{ij}=\delta_{ij}$, $x^i=y^i$, $V^1=v_1$, $V^2=v_2$, $V^3=v_3$, $\Gamma_{ij}^k=0$，可得

$$
\frac{\partial(\rho v_j)}{\partial t}+\frac{\partial(\delta_{ij}p+\rho v_i v_j)}{\partial y^i}=0 \tag{4-25)'
$$

(三) 能量方程的守恒形式

能量方程可根据式

$$
\frac{\partial(\rho e)}{\partial t}+\nabla\cdot(p+\rho e)\boldsymbol{v}=0
$$

应用散度表达式求得

$$
\frac{\partial(\rho e\sqrt{g})}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x^i}[(p+\rho e)\sqrt{g}V^i]=0 \tag{4-27}
$$

对于柱坐标系，为

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial(\rho re)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial r}[rv_r(p+\rho e)]+\frac{\partial}{\partial\varphi}[v_\varphi(p+\rho e)]\\
&\quad+\frac{\partial}{\partial z}[rv_z(p+\rho e)]=0
\end{aligned}
\tag{4-28}
$$

第十节　有势流动、势函数及其性质、势函数方程

由式(3-88)，令$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{v}$，则

$$\nabla\times \boldsymbol{v}=\mathrm{rot}\boldsymbol{v}=\frac{1}{\sqrt{g}}\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x^1} & \dfrac{\partial}{\partial x^2} & \dfrac{\partial}{\partial x^3} \\ V_1 & V_2 & V_3 \end{vmatrix}$$

如果对整个流场满足

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{v}=0$$

则称此流场为无旋(或有势)场，而这种流动称有势流动。根据零矢量的定义，对于有势流动，为

$$\frac{\partial V_j}{\partial x^i}-\frac{\partial V_i}{\partial x^j}=0$$

或

$$\frac{\partial V_j}{\partial x^i}=\frac{\partial V_i}{\partial x^j} \tag{a}$$

从数学分析知道，要使 V_i 为某一函数 ϕ 对坐标的偏导数，即

$$V_1=\frac{\partial\phi}{\partial x^1};\ V_2=\frac{\partial\phi}{\partial x^2};\ V_3=\frac{\partial\phi}{\partial x^3}$$

则式(a)是它的充要条件。

由于 $V_i=V_i(x^1,\ x^2,\ x^3,\ t)$，因而 ϕ (势函数)也是 x^i、t 的函数，在这种情况下，微分三项式

$$V_1dx^1+V_2dx^2+V_3dx^3$$

可认为是 ϕ 函数的全微分

$$V_1dx^1+V_2dx^2+V_3dx^3=\frac{\partial\phi}{\partial x^1}dx^1+\frac{\partial\phi}{\partial x^2}dx^2+\frac{\partial\phi}{\partial x^3}dx^3=d\phi$$

即对于无旋流动，有

$$\left.\begin{aligned} &V_i=\frac{\partial\phi}{\partial x^i},\ d\phi=V_idx^i \\ &\boldsymbol{v}=V_i\boldsymbol{e}^i=\frac{\partial\phi}{\partial x^i}\boldsymbol{e}^i=\nabla\phi \end{aligned}\right\} \tag{b}$$

式(b)表明，对于有势流动一定存在势函数 ϕ，其对坐标 x^i 的偏导数等于速度在该方向的协变分量。

不仅如此，在笛卡尔坐标系下，速度势ϕ对任意方向$\boldsymbol{S}$的偏导数（即所谓方向导数）就是速度$\boldsymbol{v}$在该方向的投影，这一结论对斜交曲线坐标系也同样正确，下面就来证明这一点。

由

$$\frac{d\phi}{ds}=\frac{\partial\phi}{\partial x^i}\frac{dx^i}{ds}=\frac{\partial\phi}{\partial y^k}\frac{\partial y^k}{\partial x^i}\left(\frac{\partial x^i}{\partial y^j}\frac{dy^j}{ds}\right)$$

式中应用了 $\frac{\partial\phi}{\partial x^i}=\frac{\partial\phi}{\partial y^k}\frac{\partial y^k}{\partial x^i}$，$\frac{dx^i}{ds}=\frac{\partial x^i}{\partial y^j}\frac{dy^j}{ds}$

因

$$\frac{\partial y^k}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial y^j}=\delta^k_j$$

所以

$$\frac{\partial\phi}{\partial s}=\frac{\partial\phi}{\partial y^k}\delta^k_j\frac{dy^j}{ds}=\frac{\partial\phi}{\partial y^k}\frac{dy^k}{ds}$$

对于笛卡尔坐标系dy^k/ds应是单位矢量$\boldsymbol{S}$方向在$\boldsymbol{k}$坐标轴方向的投影，即

$$\frac{dy^k}{ds}=(\boldsymbol{S})_k=S_k$$

至于$\partial\phi/\partial y^k$正好就是速度$\boldsymbol{v}$在笛卡尔坐标系下$\boldsymbol{k}$坐标轴的投影分量，为

$$\frac{\partial\phi}{\partial x^k}=(\boldsymbol{v})_k=v_k$$

而

$$\frac{\partial\phi}{\partial s}=\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{S}=v_s$$

由此得证。

应用以上结果可求得势函数方程如下：

在运动为定常的条件下，连续方程可写成

$$\mathrm{div}\rho\boldsymbol{v}=\rho\mathrm{div}\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{grad}\rho=\rho\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{g}V^k)+V^k\frac{\partial\rho}{\partial x^k}=0 \qquad (a)$$

运动方程为

$$dp+\rho v dv=0 \tag{b}$$

音速方程为

$$a^2=\frac{dp}{d\rho} \tag{c}$$

应用以上方程，可得

$$d\rho=-\frac{\rho}{a^2}d\left(\frac{g^{ij}}{2}V_iV_j\right)=-\frac{\rho}{2a^2}\frac{\partial}{\partial x^k}(g^{ij}V_iV_j)dx^k$$

但
$$d\rho=\frac{\partial\rho}{\partial x^k}dx^k$$

因而
$$\frac{\partial\rho}{\partial x^k}dx^k=-\frac{\rho}{2a^2}\frac{\partial}{\partial x^k}(g^{ij}V_iV_j)dx^k$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial x^k}=-\frac{\rho}{2a^2}\frac{\partial}{\partial x^k}(g^{ij}V_iV_j)$$

代入式(a)，得

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{g}V^k)-V^k\left[\frac{1}{2a^2}\frac{\partial}{\partial x^k}(g^{ij}V_iV_j)\right]=0 \tag{4-29}$$

如将上式中逆变分量改为逆变物理分量，则

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{g}\sqrt{g^{kk}}\,\mathrm{v}^k)-\frac{\sqrt{g^{kk}}\,V^k}{2a^2}\frac{\partial}{\partial x^k}(g^{ij}\sqrt{g_{ii}g_{jj}}V_iV_j)$$
$$=0 \tag{4-30}$$

如以
$$V_i=\frac{\partial\phi}{\partial x^i},\ V_j=\frac{\partial\phi}{\partial x^j},\ V^k=g^{ik}\frac{\partial\phi}{\partial x^i}$$

代入式(4-39)，即可求得斜交曲线坐标系下的势函数方程。

作为一个特例，可应用上式导出柱坐标系下的势函数方程。

对于柱坐标系，应用

$$\sqrt{g}=r,\ x^1=r,\ x^2=\varphi,\ x^3=z$$

$$\sqrt{g_{11}}=1,\ \sqrt{g_{22}}=r,\ \sqrt{g_{33}}=1,\ \sqrt{g^{11}}=1,\ \sqrt{g^{22}}=\frac{1}{r},$$

$$\sqrt{g^{33}}=1$$

代入式(4-30)，得

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\mathrm{v}_r)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}(v_\varphi)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial z}(r\mathrm{v}_z)$$

$$-\frac{\mathrm{v}_r}{2a^2}\frac{\partial}{\partial r}(\mathrm{v}_r^2+\mathrm{v}_\varphi^2+\mathrm{v}_z^2)-\frac{1}{2a^2r}\mathrm{v}_\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}(\mathrm{v}_r^2+\mathrm{v}_\varphi^2+\mathrm{v}_z^2)$$

$$-\frac{1}{2a^2}\mathrm{v}_z\frac{\partial}{\partial z}(\mathrm{v}_r^2+\mathrm{v}_\varphi^2+\mathrm{v}_z^2)=0$$

令

$$\mathrm{v}_r=\frac{\partial\phi}{\partial r},\ \mathrm{v}_\varphi=\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi},\ \mathrm{v}_z=\frac{\partial\phi}{\partial z}$$

$$\mathrm{v}_r=\phi_r,\ \mathrm{v}_\varphi=\frac{1}{r}\phi_\varphi,\ \mathrm{v}_z=\phi_z$$

则

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\phi_r)+\frac{\partial}{r\partial\varphi}\left(\frac{1}{r}\phi_\varphi\right)+\frac{\partial}{\partial z}(\phi_z)-\frac{1}{2a^2}\phi_r\frac{\partial}{\partial r}$$

$$\times\left(\phi_r^2+\frac{1}{r^2}\phi_\varphi^2+\phi_z^2\right)-\frac{1}{2a^2r^2}\phi_\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\phi_r^2+\frac{1}{r^2}\phi_\varphi^2+\phi_z^2\right)$$

$$-\frac{1}{2a^2}\phi_z\frac{\partial}{\partial z}\left(\phi_r^2+\frac{1}{r^2}\varphi_\varphi^2+\phi_z^2\right)=0$$

展开之，得

$$\phi_{rr}+\frac{1}{r}\phi_r+\frac{1}{r^2}\phi_{\varphi\varphi}+\phi_{zz}-\frac{\phi_r^2}{a^2}\phi_{rr}-\frac{1}{a^2r^2}\phi_r\phi_\varphi\phi_{r\varphi}$$

$$+\frac{1}{a^2r^3}\phi_\varphi^2\phi_r-\frac{1}{a^2}\phi_r\phi_z\phi_{rz}-\frac{1}{a^2r^2}\phi_\varphi\phi_r\phi_{r\varphi}$$

$$-\frac{1}{a^2r^4}\phi_\varphi^2\phi_{\varphi\varphi}-\frac{1}{a^2r^2}\phi_\varphi\phi_z\phi_{z\varphi}-\frac{1}{a^2}\phi_z\phi_r\phi_{zr}$$

$$-\frac{1}{a^2r^2}\phi_z\phi_\varphi\phi_{z\varphi}-\frac{1}{a^2}\phi_z^2\phi_{zz}=0$$

整理后可得柱坐标系下的势函数方程为

$$\left(1-\frac{\phi_r^2}{a^2}\right)\phi_{rr}+\left(1-\frac{\phi_\varphi^2}{a^2r^2}\right)\frac{\phi_{\varphi\varphi}}{r^2}+\left(1-\frac{\phi_z^2}{a^2}\right)\phi_{zz}$$

$$-\frac{2\phi_\varphi\phi_r}{a^2r^2}\phi_{\varphi r}-\frac{2\phi_\varphi\phi_z}{a^2r^2}\phi_{\varphi z}-\frac{2\phi_r\phi_z}{a^2}\phi_{rz}+\frac{\phi_r}{r}$$

$$\times\left(1+\frac{\phi_o^2}{a^2\gamma^2}\right)=0 \tag{4-31}$$

第十一节　叶轮机械气体动力学中两类坐标系转换关系式的导出

在叶轮机械气体动力学中，经常遇到绝对坐标系和相对坐标系间的相互转换，这一节将应用已介绍过的知识求得两类坐标系间相互转换的关系式。

现以 x^i 表示绝对柱坐标，x^{*i} 表示相对柱坐标，ω 为转速，其方向和 Oy^3 相同，以 e_i 表示绝对柱坐标系的基本矢量，e_i^* 表示相对柱坐标系的基本矢量，假设初瞬时两类坐标系重合一致，则

$$x^1=x^{*1}=r,\ x^2=x^{*2}+\omega t(\text{或 }\theta=\varphi+\omega t)$$

$$x^3=x^{*3}=z,\ e_i=e_i^*(\text{其中 }e_3=v_3)$$

令流场中的标量函数为 q、矢量函数为 A，由绝对标量和绝对矢量的定义，可得

$$q(x^i,\ t)=q^*[x^i(x^{*1},\ x^{*2},\ x^{*3}),\ t^*]$$

$$A(x^i,\ t)=A^*[x^i(x^{*1},\ x^{*2},\ x^{*3}),\ t^*]$$

（一）标量函数 q 对坐标的偏导数转换式

由
$$\frac{\partial q^*}{\partial x^{*i}}=\frac{\partial_a q}{\partial x^j}\frac{\partial x^j}{\partial x^{*i}},\quad \frac{\partial x^j}{\partial x^{*i}}=\delta_i^j$$

因而

$$\frac{\partial q^*}{\partial x^{*i}}=\frac{\partial_a q}{\partial x^j}\delta_i^j=\frac{\partial_a q}{\partial x^i} \tag{4-32}$$

上式表明，标量函数 q 对两类对应坐标的偏导数相等。

式中 $\frac{\partial}{\partial x^{*i}}$ 表示对相对坐标的偏导数，而 $\frac{\partial_a}{\partial x^i}$ 则表示对绝对坐标的偏导数。

（二）q 对时间的偏导数

$$\frac{\partial q^*}{\partial t^*}=\frac{\partial_o q}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial t^*}+\frac{\partial_o q}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial t^*}$$

由于 $t=t^*$, $x^1=x^{*1}$, $x^2=x^{*2}+\omega t$, $x^3=x^{*3}$

因而 $$\frac{\partial t}{\partial t^*}=1,\quad \frac{\partial x^1}{\partial t^*}=\frac{\partial x^{*1}}{\partial t^*}=0,\quad \frac{\partial x^2}{\partial t}=\frac{\partial x^{*2}}{\partial t^*}+\omega=\omega$$

$$\frac{\partial x^3}{\partial t^*}=\frac{\partial x^{*3}}{\partial t^*}=0,\quad \frac{\partial q}{\partial t^*}=\frac{\partial q}{\partial t}$$

所以

$$\frac{\partial q^*}{\partial t^*}=\frac{\partial_o q}{\partial t}+\omega\frac{\partial_o q}{\partial x^2}=\frac{\partial_o q}{\partial t}+\omega\frac{\partial q}{\partial x^2} \tag{4-33}$$

（三）q 对时间 t 的全导数

$$\frac{Dq^*}{Dt^*}=\frac{\partial q^*}{\partial t^*}+\frac{\partial q^*}{\partial x^{*i}}\frac{Dx^{*i}}{Dt^*}$$

由式(4-33)可得

$$\frac{Dq^*}{Dt^*}=\frac{\partial_o q}{\partial t}+\omega\frac{\partial q}{\partial x^2}+\frac{\partial q^*}{\partial x^{*1}}\frac{Dx^{*1}}{Dt}+\frac{\partial q^*}{\partial x^{*2}}\left(\frac{Dx^2}{Dt}-\omega\right)$$
$$+\frac{\partial q^*}{\partial x^{*3}}\frac{Dx^{*3}}{Dt}$$

注意到 $\frac{\partial q^*}{\partial x^{*i}}=\frac{\partial_o q}{\partial x^i}(q^*=q)$; $\frac{Dx^{*1}}{Dt}=\frac{Dx^1}{Dt}$; $\frac{Dx^{*3}}{Dt}=\frac{Dx^3}{Dt}$

于是

$$\frac{Dq}{Dt}=\frac{D_o q}{Dt} \tag{4-34}$$

式中 $$\frac{D_o q}{Dt}=\frac{\partial_o q}{\partial t}+\frac{\partial_o q}{\partial x^i}\frac{Dx^i}{Dt}$$

上式表明，标量函数 q 对时间 t 的全导数是相等的。

（四）矢量 $\boldsymbol{A}$ 对时间 t 的偏导数

在分析矢量 $\boldsymbol{A}$ 对时间 t 的偏导数时，需要注意以下事实：

$$\boldsymbol{e}_i=\boldsymbol{e}_i^*,\quad \boldsymbol{A}=A^i\boldsymbol{e}_i=A^{*i}\boldsymbol{e}_i^*$$

因而
$$A^i = A^{*i}$$

同时 $\dfrac{\partial A^{*i}}{\partial t^*} = \dfrac{\partial A^i}{\partial t} = \dfrac{\partial_0 A^i}{\partial t} + \omega \dfrac{\partial A^i}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial e_i}{\partial t} = 0$, $\dfrac{\partial e_i^*}{\partial t^*} = 0$

所以
$$\frac{\partial A^*}{\partial t^*} = \frac{\partial A^{*i}}{\partial t^*} e_i^* = \left(\frac{\partial_0 A^i}{\partial t} + \omega \frac{\partial A^i}{\partial x^2}\right) e_i$$

将上式右边 $\pm \omega A^i \dfrac{\partial e_i}{\partial x^2}$,则得

$$\frac{\partial A^*}{\partial t^*} = \frac{\partial_0 A^i}{\partial t} e_i + \omega \frac{\partial A^i}{\partial x^2} e_i + \omega A^i \frac{\partial e_i}{\partial x^2} - \omega A^i \frac{\partial e_i}{\partial x^2}$$

或

$$\frac{\partial A^*}{\partial t^*} = \frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\partial_0 A}{\partial t} + \omega \frac{\partial A}{\partial x^2} - \omega \left(A^1 \frac{\partial e_1}{\partial x^2} + A^2 \frac{\partial e_2}{\partial x_2} + A^3 \frac{\partial e_3}{\partial x^2}\right)$$

已知
$$\frac{\partial e_r}{\partial \theta} = \frac{1}{r} e_\theta, \quad \frac{\partial e_\theta}{\partial \theta} = -r e_r$$

代入之,得

$$\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} = \frac{\partial_0 \boldsymbol{A}}{\partial t} + \omega \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial \theta} - \omega \left[A^r \left(\frac{1}{r} e_\theta\right) - A^\theta (r e_r) \right]$$

或

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} &= \frac{\partial_0 \boldsymbol{A}}{\partial t} + \omega \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial \theta} - \omega \times \boldsymbol{A} \\ \frac{\partial_0 \boldsymbol{A}}{\partial t} &= \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - \omega \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial \theta} + \omega \times \boldsymbol{A} \end{aligned}\right\} \tag{4-35}$$

(五) 矢量 $\boldsymbol{A}$ 对时间的全导数

在分析矢量 $\boldsymbol{A}$ 对时间的全导数之前,先求出 e_i 对时间的全导数。由

$$e_r = \cos\theta\, u_1 + \sin\theta\, u_2, \quad e_\theta = r(-\sin\theta\, u_1 + \cos\theta\, u_2)$$

$$e_z = u_3$$

可得 $\frac{D_0 e_r}{Dt}=\left(\frac{D_0\theta}{Dt}\right)\frac{1}{r}e_\theta,\ \frac{D_0 e_\theta}{Dt}=-\frac{D_0\theta}{Dt}re_r,\ \frac{D_0 e_z}{Dt}=0$

于是

$$\frac{D_0 \boldsymbol{A}}{Dt}=\frac{D_0}{Dt}(A^i e_i)=\frac{D_0 A^i}{Dt}e_i+A^i\frac{D_0 e_i}{Dt}$$

$$=\frac{D_0 A^i}{Dt}e_i+A^r\left(\frac{D_0\theta}{Dt}\right)\frac{1}{r}e_\theta+A^\theta\left(\frac{D_0\theta}{Dt}r\right)e_r$$

已知

$$\theta=\varphi+\omega t(x^2=x^{*2}+\omega t)$$

$$A^i=A^{*i},\ \frac{D_0 A^i}{Dt}=\frac{DA^{*i}}{Dt},\ e_i=e_i^*$$

所以

$$\frac{D_0\theta}{Dt}=\frac{D_0\varphi}{Dt}+\omega=\frac{D\varphi}{Dt}+\omega$$

则

$$\frac{D_0 \boldsymbol{A}}{Dt}=\frac{DA^{*i}}{Dt}e_i^*+A^{*r}\left(\frac{D\varphi}{Dt}+\omega\right)\frac{1}{r}e_\theta^*+A^{*\theta}$$

$$\times\left(-\frac{D\varphi}{Dt}-\omega\right)e_r^*$$

$$\frac{D_0 \boldsymbol{A}}{Dt}=\frac{D\boldsymbol{A}^*}{Dt}+\omega\times \boldsymbol{A}^* \tag{4-36}$$

设 $\boldsymbol{v}$ 为绝对速度，$\boldsymbol{w}$ 为相对速度，$\omega\times\boldsymbol{r}_P$ 为牵连速度，则

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{w}+\omega\times\boldsymbol{r}_P$$

代入上式，即得

$$\frac{D_0\boldsymbol{v}}{Dt}=\frac{D}{Dt}(\boldsymbol{w}+\omega\times\boldsymbol{r}_P)+\omega\times(\boldsymbol{w}+\omega\times\boldsymbol{r}_P)$$

或

$$\frac{E_0\boldsymbol{v}}{Dt}=\frac{D\boldsymbol{w}}{Dt}+2\omega\times\boldsymbol{w}+\omega\times(\omega\times\boldsymbol{r}_P)$$

这就是叶轮机械气体动力学中经常使用的绝对运动和相对运动的转换关系式。

［例题 3］ 试应用相对速度 $\boldsymbol{w}$ 的逆变分量与绝对速度 $\boldsymbol{C}$ 的逆变分量间的关系，证明

$$\mathrm{div}\boldsymbol{C}=\mathrm{div}\boldsymbol{w}$$

解 由

$$C^{r}=W^{r},\ W^{\theta}=C^{\theta}-\omega,\ W^{z}=C^{z},\ g=g^{*}$$

及

$$\mathrm{div}\boldsymbol{C}=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial(\sqrt{g}\,C^{i})}{\partial x^{i}}$$

可得

$$\mathrm{div}\boldsymbol{C}=\frac{1}{\sqrt{g}}\left[\frac{\partial(\sqrt{g}\,W^{r})}{\partial r}+\frac{\partial(\sqrt{g}\,W^{\theta}+\sqrt{g}\,\omega)}{\partial\theta}+\frac{\partial(\sqrt{g}\,W^{z})}{\partial z}\right]$$

由

$$\frac{\partial\omega}{\partial x^{i}}=0,\ \frac{\partial W^{\theta}}{\partial\theta}=\frac{\partial W^{\theta}}{\partial\varphi},\ \frac{\partial\sqrt{g}}{\partial\theta}=0(\sqrt{g}=r)$$

得

$$\mathrm{div}\boldsymbol{C}=\mathrm{div}\boldsymbol{w}$$

第十二节 流函数的定义式及其性质

在二元、定常流动中，无论是可压缩或不可压缩流体均存在流函数 ψ。由二元、定常可压缩流动的连续方程，为

$$\frac{\partial}{\partial x^{i}}(\rho\sqrt{g}\,V^{i})=0\text{或}\frac{\partial}{\partial x^{1}}(\rho\sqrt{g}\,V^{1})+\frac{\partial}{\partial x^{2}}(\rho\sqrt{g}\,V^{2})=0\tag{4-37}$$

如令

$$V^{1}=\frac{\rho_{0}}{\rho\sqrt{g}}\frac{\partial\psi}{\partial x^{2}};\ V^{2}=-\frac{\rho_{0}}{\rho\sqrt{g}}\frac{\partial\psi}{\partial x^{1}}\tag{a}$$

则上式满足连续方程。为了以后讨论方便，将 α、β 作为二元流动的下标，于是

$$V^{\alpha}=\frac{\rho_{0}}{\rho\sqrt{g}}\varepsilon_{\alpha\beta3}\frac{\partial\psi}{\partial x^{\beta}};\ \frac{\partial\psi}{\partial x^{\beta}}=\varepsilon_{\alpha\beta3}\left(\frac{\rho\sqrt{g}}{\rho_{0}}\right)V^{\alpha}\tag{b}$$

式中 α、β 均取 1、2。

式(b)即为可压缩流体的二元定常流动的流函数定义式。

流函数 ψ 有两个重要性质：

（一）令 $\psi=\text{const}$，则此曲线即为流线

由

$$d\psi=\frac{\partial\psi}{\partial x^1}dx^1+\frac{\partial\psi}{\partial x^2}dx^2=\frac{\partial\psi}{\partial x^\beta}dx^\beta \qquad (c)$$

将式(b)代入式(c)，则

$$d\psi=\left(\frac{\rho\sqrt{g}}{\rho_0}\right)[\varepsilon_{\alpha\beta3}V^\alpha dx^\beta] \qquad (d)$$

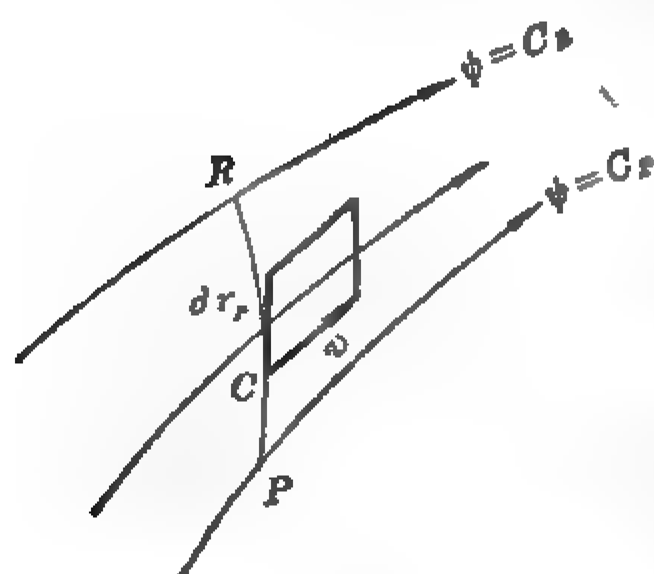


图 4-7

由流线方程，可得

$$\varepsilon_{\alpha\beta3}V^\alpha dx^\beta=0$$

代入式(d)，得

$$d\psi=0;\ \psi=\text{const}。$$

由此得证。

（二）过两点间的质量流量等于ρ_0乘以该两点流函数ψ之差。

设在流线$\psi=C_P$、$\psi=C_R$上任取两点P、R（如图4-7），然后在P、R两点的连线上取一点C，作沿PR联线的微元位置矢量$d\boldsymbol{r}_P$，并假设C点的速度为$\boldsymbol{v}$，于是过微元弧段$ds=|d\boldsymbol{r}_P|$的质量流量应是

$$dQ=\rho|\boldsymbol{v}\times d\boldsymbol{r}_P|=\rho\varepsilon_{\alpha\beta3}V^\alpha dx^\beta\sqrt{gg^{33}}$$

对于二元情况，$g^{33}=1$。因而

$$dQ=\rho\varepsilon_{\alpha\beta3}V^\alpha dx^\beta\sqrt{g}$$

已知
$$\rho\sqrt{g}\,\varepsilon_{\alpha\beta3}V^\alpha=\rho_0\frac{\partial\psi}{\partial x^\beta}$$

代入上式，得
$$dQ=\rho_0\frac{\partial\psi}{\partial x^\beta}dx^\beta=\rho_0\,d\psi$$

于是
$$Q=\int_P^R dQ=\rho_0\int_P^R d\psi=\rho_0(C_R-C_P)$$

由此得证。

第十三节 定常不可压缩流体无旋流动的流函数方程

对于不可压缩流体，$\rho=\rho_0$，因而

$$V^{\alpha}=\varepsilon_{\alpha\beta3}\frac{1}{\sqrt{g}}\psi_{,\beta} \tag{a}$$

再加无旋条件

$$\varepsilon_{\nu\mu3}V_{\nu,\mu}=0 \tag{b}$$

及

$$V_{\nu}=g_{\nu\alpha}v^{\alpha} \tag{c}$$

可得
$$V_{\nu}=g_{\nu\alpha}v^{\alpha}=\varepsilon_{\alpha\beta3}\left(g_{\nu\alpha}\frac{1}{\sqrt{g}}\psi_{,\beta}\right)$$

代入式(b)，得

$$\varepsilon_{\nu\mu3}\left(\varepsilon_{\alpha\beta3}g_{\nu\alpha}\frac{1}{\sqrt{g}}\psi_{,\beta}\right)_{,\mu}=0 \tag{d}$$

已知
$$\varepsilon_{\nu\mu3}\varepsilon_{\alpha\beta3}=\delta_{\nu\alpha}\delta_{\mu\beta}-\delta_{\nu\beta}\delta_{\mu\alpha}$$

代入上式，得
$$\left[(\delta_{\nu\alpha}\delta_{\mu\beta}-\delta_{\nu\beta}\delta_{\mu\alpha})\frac{g_{\nu\alpha}}{\sqrt{g}}\psi_{,\beta}\right]_{,\mu}=0$$

或
$$\left(\frac{g_{\nu\nu}}{\sqrt{g}}\psi_{,\mu}-\frac{g_{\nu\mu}}{\sqrt{g}}\psi_{,\nu}\right)_{,\mu}=0$$

将上式展开，为

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\left(\frac{g_{11}}{\sqrt{g}}\frac{\partial\psi}{\partial x^{\mu}}-\frac{g_{1\mu}}{\sqrt{g}}\frac{\partial\psi}{\partial x^{1}}\right)+\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\left(\frac{g_{22}}{\sqrt{g}}\frac{\partial\psi}{\partial x^{\mu}}-\frac{g_{2\mu}}{\sqrt{g}}\frac{\partial\psi}{\partial x^{2}}\right)=0$$

$$\frac{\partial}{\partial x^{1}}\left[\frac{g_{11}}{\sqrt{g}}\frac{\partial\psi}{\partial x^{1}}-\frac{g_{11}}{\sqrt{g}}\frac{\partial\psi}{\partial x^{1}}\right]+\frac{\partial}{\partial x^{2}}\left[\frac{g_{11}}{\sqrt{g}}\frac{\partial\psi}{\partial x^{2}}-\frac{g_{12}}{\sqrt{g}}\frac{\partial\psi}{\partial x^{1}}\right]+\frac{\partial}{\partial x^{1}}\left[\frac{g_{22}}{\sqrt{g}}\frac{\partial\psi}{\partial x^{1}}-\frac{g_{21}}{\sqrt{g}}\frac{\partial\psi}{\partial x^{2}}\right]$$

$$+\frac{\partial}{\partial x^2}\left[\frac{g_{33}}{\sqrt{g}}\frac{\partial\psi}{\partial x^3}-\frac{g_{23}}{\sqrt{g}}\frac{\partial\psi}{\partial x^3}\right]=0$$

整理得

$$\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\frac{g_{22}}{\sqrt{g}}\frac{\partial\psi}{\partial x^1}\right)+\frac{\partial}{\partial x^2}\left(\frac{g_{11}}{\sqrt{g}}\frac{\partial\psi}{\partial x^2}\right)$$

$$-\left[\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\frac{g_{21}}{\sqrt{g}}\frac{\partial\psi}{\partial x^2}\right)+\frac{\partial}{\partial x^2}\left(\frac{g_{12}}{\sqrt{g}}\frac{\partial\psi}{\partial x^1}\right)\right]=0 \quad (4\text{-}38)$$

式(4-38)即为定常、二元不可压缩流体无旋流动的流函数方程。

对于柱坐标系，则由 $g_{11}=1$, $g_{22}=r^2$, $\sqrt{g}=r$, $g_{12}=g_{21}=0$, 代入式(4-38)，可得

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right)=0$$

或
$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}=0;\ \Delta\psi=0$$

此即为ψ函数的拉普拉斯方程。如果是笛卡尔坐标，则可得(按通常的表达形式)

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=0$$

第十四节　定常、可压缩无旋流动的流函数方程

对于无旋、可压缩流体的定常流动，可根据连续方程

$$V^\alpha=\varepsilon_{\alpha\beta3}\frac{\rho_0}{\rho\sqrt{g}}\psi_{,\beta};\ V_\nu=g_{\nu\alpha}V^\alpha$$

$$V_\nu=\varepsilon_{\alpha\beta3}\frac{g_{\nu\alpha}}{\rho\sqrt{g}}\rho_0\psi_{,\beta}$$

由无旋条件
$$\varepsilon_{\nu\mu3}V_{\nu,\mu}=0$$

得 $$e_{\nu\mu3}e_{\alpha\beta3}\left(\frac{g_{\nu\alpha}}{\rho\sqrt{g}}\psi_{,\beta}\right)_{,\mu}=0$$

展开之，为 $$\frac{1}{\rho}e_{\nu\mu3}e_{\alpha\beta3}\left[\left(\frac{g_{\nu\alpha}}{\sqrt{g}}\psi_{,\beta}\right)_{,\mu}-\frac{1}{\rho}\left(\frac{g_{\nu\alpha}}{\sqrt{g}}\psi_{,\beta}\right)\rho_{,\mu}\right]=0$$

或

$$(\delta_{\nu\alpha}\delta_{\mu\beta}-\delta_{\nu\beta}\delta_{\mu\alpha})\left(\frac{g_{\nu\alpha}}{\sqrt{g}}\psi_{,\beta}\right)_{,\mu}-\frac{1}{\rho}(\delta_{\nu\alpha}\delta_{\mu\beta}-\delta_{\nu\beta}\delta_{\mu\alpha})$$
$$\times\left(\frac{g_{\nu\alpha}}{\sqrt{g}}\psi_{,\beta}\right)\rho_{,\mu}=0$$

经指标缩减后，得

$$\left(\frac{g_{\alpha\alpha}}{\sqrt{g}}\psi_{,\mu}\right)_{,\mu}-\left(\frac{g_{\mu\nu}}{\sqrt{g}}\psi_{,\nu}\right)_{,\mu}-\frac{1}{\rho}\left(\frac{g_{\alpha\alpha}}{\sqrt{g}}\psi_{,\mu}-\frac{g_{\mu\nu}}{\sqrt{g}}\psi_{,\nu}\right)\rho_{,\mu}$$
$$=0 \tag{a}$$

式(a)中的$\rho_{,\mu}$还须应用基本方程作适当处理后再消去如下：由运动微分方程

$$dp=-\rho v\,dv$$

音速方程 $$dp=a^2\,d\rho$$

得 $$d\rho=-\frac{\rho}{a^2}d\left(\frac{v^2}{2}\right)$$

$$\rho_{,\mu}=-\frac{\rho}{a^2}\left(\frac{v^2}{2}\right)_{,\mu} \tag{b}$$

但

$$\frac{1}{2}v^2=\frac{1}{2}(V^\alpha V_\alpha)=\frac{1}{2}\left(e_{\alpha\beta3}\frac{\rho_0}{\rho\sqrt{g}}\psi_{,\beta}g_{\alpha\lambda}V^\lambda\right)$$
$$=\frac{1}{2}e_{\alpha\beta3}e_{\lambda\theta3}\left(\frac{\rho_0^2}{\rho^2 g}g_{\alpha\lambda}\psi_{,\beta}\psi_{,\theta}\right) \tag{c}$$

将式(c)代入式(b)，为

$$\rho_{,\mu}=-\frac{\rho}{2a^2}e_{\alpha\beta3}e_{\lambda\theta3}\left(\frac{\rho_0^2}{\rho^2 g}g_{\alpha\lambda}\psi_{,\beta}\psi_{,\theta}\right)_{,\mu}$$

展开之，得

$$\rho_{,\mu}=-\frac{\rho}{2a^2}\delta_{\alpha\beta\delta}\delta_{\lambda\theta\delta}\left[\frac{\rho_0^2}{\rho^2}\left(\frac{g_{\alpha\lambda}}{g}\psi_{,\beta}\psi_{,\theta}\right)_{,\mu}\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\rho_0^2}{g}g_{\alpha\lambda}\psi_{,\beta}\psi_{,\theta}\right)\left(-\frac{2}{\rho^3}\right)\rho_{,\mu}\right]$$

或

$$\rho_{,\mu}=-\frac{\rho_0^2}{2a^2\rho^2}\frac{\left(\frac{g_{\lambda\lambda}}{g}\psi_{,\theta}^2-\frac{g_{\theta\lambda}}{g}\psi_{,\lambda}\psi_{,\theta}\right)}{\left[1-\frac{\rho_0^2}{\rho^3 g}\left(\frac{g_{\lambda\lambda}}{g}\psi_{,\theta}^2-\frac{g_{\theta\lambda}}{g}\psi_{,\lambda}\psi_{,\theta}\right)\right]} \tag{d}$$

将式(d)代入式(a)，得

$$\left(\frac{g_{\alpha\alpha}}{\sqrt{g}}\psi_{,\mu}-\frac{g_{\mu\lambda}}{\sqrt{g}}\psi_{,\nu}\right)_{,\mu}$$

$$+\frac{\rho_0^2}{2a^2\rho^2}\frac{\left(\frac{g_{\alpha\alpha}}{\sqrt{g}}\psi_{,\mu}-\frac{g_{\mu\nu}}{\sqrt{g}}\psi_{,\nu}\right)\left(\frac{g_{\lambda\lambda}}{g}\psi_{,\theta}^2-\frac{g_{\theta\lambda}}{g}\psi_{,\theta}\psi_{,\lambda}\right)_{,\mu}}{\left[1-\frac{\rho_0^2}{a^2\rho^2}\left(\frac{g_{\lambda\lambda}}{g}\psi_{,\theta}^2-\frac{g_{\theta\lambda}}{g}\psi_{,\lambda}\psi_{,\theta}\right)\right]}$$

$$=0 \tag{4-39}$$

再将式(4-39)展开，并整理之，其各项为

$$\left(\frac{g_{\alpha\alpha}}{\sqrt{g}}\psi_{,\mu}-\frac{g_{\mu\nu}}{\sqrt{g}}\psi_{,\nu}\right)_{,\mu}=\left[\left(\left(\frac{g_{22}}{\sqrt{g}}\right)\psi_{,1}\right)_{,1}+\left(\frac{g_{11}}{\sqrt{g}}\psi_{,2}\right)_{,2}\right]$$

$$-\left[2\frac{g_{12}}{\sqrt{g}}\psi_{,12}+\left(\frac{g_{12}}{\sqrt{g}}\right)_{,1}\psi_{,2}\right.$$

$$\left.+\left(\frac{g_{12}}{\sqrt{g}}\right)_{,2}\psi_{,1}\right]$$

$$\left(\frac{g_{\lambda\lambda}}{g}\psi_{,\theta}^2+\frac{g_{\theta\lambda}}{g}\psi_{,\lambda}\psi_{,\theta}\right)=\left(\frac{g_{22}}{g}\psi_{,1}^2+\frac{g_{11}}{g}\psi_{,2}^2+\frac{2g_{12}}{g}\psi_{,1}\psi_{,2}\right)$$

$$\left(\frac{g_{\alpha\alpha}}{\sqrt{g}}\psi_{,\mu}-\frac{g_{\mu\nu}}{\sqrt{g}}\psi_{,\nu}\right)\left(\frac{g_{\lambda\lambda}}{g}\psi_{,\theta}^2-\frac{g_{\theta\lambda}}{g}\psi_{,\theta}\psi_{,\lambda}\right)_{,\mu}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{g}}\left\{(g_{22}\psi_{,1}-g_{12}\psi_{,2})\left[\frac{1}{g}(g_{11}\psi_{,2}^2+g_{22}\psi_{,1}^2\right.\right.$$

$$\left.-2g_{12}\psi_{,1}\psi_{,2})\right]_{,1}+(g_{11}\psi_{,2}-g_{21}\psi_{,1})\left[\frac{1}{g}(g_{11}\psi_{,2}^2\right.$$

$$+g_{22}\psi,_1^2-2g_{12}\psi,_1\psi,_2)\Big],_2\Big\}$$

对于柱坐标，则可令 $x^1=r$, $x^2=z$, 即轴对称情况，为

$$g_{11}=1,\ g_{22}=1,\ g=r^2,\ g^{12}=g^{21}=0$$

$$\psi,_1=\psi,_r,\ \psi,_2=\psi,_z$$

代入以上各项并经整理，可得轴对称、无旋流动的流函数方程为

$$\left(1-\frac{\rho_0^2}{r^2a^2\rho^2}\psi,_z^2\right)\psi,_{rr}+\left(1-\frac{\rho_0^2}{r^2\rho^2a^2}\psi,_r^2\right)\psi,_{zz}$$

$$+2\frac{\rho_0^2}{r^2\rho^2a^2}\psi,_r\psi,_z\psi,_{rz}-\frac{\psi,_r}{r}=0^{(1)} \qquad (4\text{-}40)$$

---

(1) 对于柱坐标系，为

$$\left(\frac{g_{\alpha\alpha}}{\sqrt{g}}\psi,_\mu-\frac{g_{\mu\nu}}{\sqrt{g}}\psi,_\nu\right),_\mu=\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}\right),_r+\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right),_z=\frac{1}{r}\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}$$

$$-\frac{1}{r^2}\frac{\partial\psi}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$$

$$\left(\frac{g_{\lambda\lambda}}{g}\psi,_\theta^2+\frac{g_{\theta\lambda}}{g}\psi,_\lambda\psi,_\theta\right)=\frac{1}{r^2}\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2\right]$$

$$\left(\frac{g_{\alpha\alpha}}{\sqrt{g}}\psi,_\mu-\frac{g_{\mu\nu}}{\sqrt{g}}\psi,_\nu\right)\left(\frac{g_{\lambda\lambda}}{g}\psi,_\theta^2-\frac{g_{\theta\lambda}}{g}\psi,_\theta\psi,_\lambda\right),_\mu$$

$$=\frac{1}{r}\left\{\frac{\partial\psi}{\partial r}\left[\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)^2\right],_r\right.$$

$$\left.+\frac{\partial\psi}{\partial z}\left[\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2\right],_z\right\}$$

$$=\frac{2}{r}\left\{\frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial^2\psi}{\partial r\partial z}+\frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}\right)\right.$$

$$+\frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial^2\psi}{\partial r\partial z}+\frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{1}{r^3}\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2\right]$$

代入式(4-39)，得

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial\psi}{\partial r}+\frac{\rho_0^2}{a^2\rho^2r^2}$$

$$\times\frac{\left\{\psi,_r\left[\psi,_r\psi,_{rr}+\psi,_z\psi,_{rz}-\frac{1}{r}(\psi,_r^2+\psi,_z^2)\right]+\psi,_z(\psi,_r\psi,_{zr}+\psi,_z\psi,_{zz})\right\}}{\left[1-\frac{\rho_0^2}{r^2\rho^2a^2}(\psi,_r^2+\psi,_z^2)\right]}$$

整理即得 $\left[1-\frac{\rho_0^2}{r^2a^2\rho^2}\psi,_z^2\right]\psi_{rr}+\left[1-\frac{\rho_0^2}{r^2\rho^2a^2}\psi_r^2\right]\psi_{zz}+2\frac{\rho_0^2}{r^2\rho^2a^2}\psi_r\psi_z\psi_{rz}-\frac{\psi_r}{r}=0$

第十五节　二元条件下，涡量ζ的表达式

在二元流动的条件下，涡量ζ可表示

$$\zeta=\frac{1}{\sqrt{g}}\left(\frac{\partial V_2}{\partial x^1}-\frac{\partial V_1}{\partial x^2}\right)e_3=\varepsilon_{\nu\mu 3}\frac{1}{\sqrt{g}}V_{\mu,\nu}e_3$$

由

$$V^{\alpha}=\varepsilon_{\alpha\beta 3}\frac{\rho_0}{\rho\sqrt{g}}\psi_{,\beta},\ V_{\mu}=g_{\mu\alpha}V^{\alpha}$$

得

$$\begin{aligned}\zeta&=\varepsilon_{\nu\mu 3}\frac{1}{\sqrt{g}}(g_{\mu\alpha}V^{\alpha})_{,\nu}e_3=\varepsilon_{\nu\mu 3}\varepsilon_{\alpha\beta 3}\frac{1}{\sqrt{g}}\left(g_{\mu\alpha}\frac{\rho_0}{\rho\sqrt{g}}\psi_{,\beta}\right)_{,\nu}e_3\\&=(\delta_{\nu\alpha}\delta_{\mu\beta}-\delta_{\nu\beta}\delta_{\mu\alpha})\frac{1}{\sqrt{g}}\left(g_{\mu\alpha}\frac{\rho_0}{\rho\sqrt{g}}\psi_{,\beta}\right)_{,\nu}e_3\\&=\frac{1}{\sqrt{g}}\left(g_{\nu\mu}\frac{\rho_0}{\rho\sqrt{g}}\psi_{,\mu}-g_{\alpha\alpha}\psi_{,\nu}\frac{\rho_0}{\rho\sqrt{g}}\right)_{,\nu}e_3\\&=\frac{\rho_0}{\sqrt{g}}\left\{\left(\frac{g_{12}\psi_{,2}-g_{22}\psi_{,1}}{\rho\sqrt{g}}\right)_{,1}+\left(\frac{g_{21}\psi_{,1}-g_{11}\psi_{,2}}{\rho\sqrt{g}}\right)_{,2}\right\}e_3\end{aligned}\tag{4-41}$$

式(4-41)即为斜交曲线坐标系下，二元、定常、可压缩流动的涡量表达式，如果是笛卡尔坐标，则

$$g_{ij}=\delta_{ij},\ \sqrt{g}=1,\ e_3=u_3$$

式(4-41)简化为

$$\zeta=-\rho_0\left[\left(\frac{\psi_{,1}}{\rho}\right)_{,1}+\left(\frac{\psi_{,2}}{\rho}\right)_{,2}\right]u_3$$

展开之，得

$$\begin{aligned}\zeta&=-\left[\frac{\rho_0}{\rho}(\psi_{,11}+\psi_{,22})-\frac{\rho_0}{\rho^2}(\psi_{,1}\rho_{,1}+\psi_{,2}+\rho_{,2})\right]e_3\\&=\left[-\frac{\rho_0}{\rho}\Delta\psi+\frac{\rho^0}{\rho^2}(\nabla\psi\cdot\nabla\rho)\right]u_3\end{aligned}$$

或
$$\rho\zeta=\rho_0\left[-\Delta\psi+\frac{1}{\rho}(\nabla\psi\cdot\nabla\rho)\right]u_3$$

$$\rho\zeta=\left[-\Delta\psi+\frac{1}{\rho}(\nabla\psi\cdot\nabla\rho)\right]\rho_0 \tag{4-42}$$

对于柱坐标系，如令 $g_{11}=g_{rr}=1$，$g_{22}=g_{zz}=1$，$\sqrt{g}=r$，$\sqrt{g_{\varphi\varphi}}=r$ 则

$$\zeta=\frac{-\rho_0}{\sqrt{g}}\left[\left(\frac{\psi_{,r}}{\rho\sqrt{g}}\right)_{,r}+\left(\frac{\psi_{,z}}{\rho\sqrt{g}}\right)_{,z}\right]\sqrt{g_{\varphi\varphi}}\,l_\varphi$$

$$=-\rho_0\left[\left(\frac{\psi_{,r}}{\rho r}\right)_{,r}+\left(\frac{\psi_{,z}}{\rho r}\right)_{,z}\right]l_\varphi$$

于是

$$\zeta=-\left\{\frac{\rho_0}{\rho}\left[\left(\frac{\psi_{,r}}{r}\right)_{,r}+\left(\frac{\psi_{,z}}{r}\right)_{,z}\right]\right.$$

$$\left.-\frac{\rho_0}{\rho^2}\left[\left(\frac{\psi_{,r}}{r}\right)\rho_{,r}+\left(\frac{\psi_{,z}}{r}\right)\rho_{,z}\right]\right\}$$

或 $$\zeta=\frac{-\rho_0}{\rho r}\left[\left(\psi_{,rr}-\frac{\psi_{,r}}{r}+\psi_{,zz}\right)-\frac{1}{\rho}(\psi_{,z}\rho_{,z}+\psi_{,r}\rho_{,r})\right]$$

则

$$\zeta=\frac{-\rho_0}{\rho r}\left[\left(\psi_{,rr}-\frac{\psi_{,r}}{r}+\psi_{,zz}\right)-\frac{1}{\rho}(\nabla\psi\cdot\nabla\rho)\right] \tag{4-43}$$

第十六节　斜交曲线坐标系下，定常超音速流动的普遍特征线理论

(一) 特征线的普遍理论

某些物理问题常常可应用一阶偏微分方程组加以描述。如假定某物理问题具有 k 个待求函数 $u_1, u_2, \cdots, u_k$（它们是 n 个自变量 $x^1, x^2, \cdots, x^n$ 的函数），则这些待求函数应服从 k 个由普遍定

律建立起来的基本方程以及补充方程。由这些方程构成的方程组常常是一阶的，而且，对于 $\partial u_\mu/\partial x^\gamma$ 而言，通常是线性的。

对于任一待求函数 u_i，其在一阶偏微分方程组中出现的形式，可写成

$$a_1\frac{\partial u_i}{\partial x^1}+a_2\frac{\partial u_i}{\partial x^2}+\cdots+a_n\frac{\partial u_i}{\partial x^n}$$

式中系数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是 x^i 和 u_i 的函数。

如果我们把 $\partial u_i/\partial x^1, \partial u_i/\partial x^2, \cdots, \partial u^i/\partial x^n$ 看成是 $\mathrm{grad}u$ 的协变分量，$a_1, a_2, \cdots, a_n$ 看成是矢量 $\boldsymbol{a}$ 的逆变分量，则以上多项式可改写为

$$\boldsymbol{a}\cdot\mathrm{grad}u_i$$

一般情况下，k 个一阶线性偏微分方程组可写出如下：

$$\left(a_{111}\frac{\partial u_1}{\partial x^1}+a_{112}\frac{\partial u_1}{\partial x^2}+\cdots+a_{11n}\frac{\partial u_1}{\partial x^n}\right)$$
$$+\left(a_{121}\frac{\partial u_2}{\partial x^1}+a_{122}\frac{\partial u_2}{\partial x^2}+\cdots+\cdots+a_{12n}\frac{\partial u_2}{\partial x^n}\right)$$
$$+\cdots+\left(a_{1k1}\frac{\partial u_k}{\partial x^1}+a_{1k2}\frac{\partial u_k}{\partial x^2}+\cdots+a_{1kn}\frac{\partial u_k}{\partial x^n}\right)=b_1$$

$$\left(a_{211}\frac{\partial u_1}{\partial x^1}+a_{212}\frac{\partial u_1}{\partial x^2}+\cdots+a_{21n}\frac{\partial u_1}{\partial x^n}\right)$$
$$+\left(a_{221}\frac{\partial u_2}{\partial x^1}+a_{222}\frac{\partial u_2}{\partial x^2}+\cdots+a_{22n}\frac{\partial u_2}{\partial x^n}\right)$$
$$+\left(a_{2k1}\frac{\partial u_k}{\partial x^1}+a_{2k2}\frac{\partial u_k}{\partial x^2}+\cdots+a_{2kn}\frac{\partial u_k}{\partial x^n}\right)=b_2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\left(a_{k11}\frac{\partial u_1}{\partial x^1}+a_{k12}\frac{\partial u_1}{\partial x^2}+\cdots+a_{k1n}\frac{\partial u_1}{\partial x^n}\right)$$
$$+\left(a_{k21}\frac{\partial u_2}{\partial x^1}+a_{k22}\frac{\partial u_2}{\partial x^2}+\cdots+a_{k2n}\frac{\partial u_2}{\partial x^n}\right)$$

$$+\left(a_{kk1}\frac{\partial u_k}{\partial x^1}+a_{kk2}\frac{\partial u_k}{\partial x^2}+\cdots+a_{kkn}\frac{\partial u_k}{\partial x^n}\right)=b_k$$

如果以矢量形式统一表示以上偏微分方程组，则只须将方程组的诸系数视为 k^2 个 n 维矢量，其一般形式可写为 $\boldsymbol{a}_{\alpha\mu}(\alpha=1, 2, \cdots, k; \mu=1, 2, \cdots, k)$。于是，由 k 个方程组成的一阶偏微分方程组可统一地表示为

$$\boldsymbol{a}_{\alpha\mu}\cdot\mathrm{grad}u_\mu=b_\alpha \tag{4-44}$$

或

$$a_{\alpha\mu\nu}\frac{\partial u_\mu}{\partial x^\nu}=b_\alpha\begin{pmatrix}\alpha=1, 2, \cdots, k\\ \mu=1, 2, \cdots, k\\ \nu=1, 2, \cdots, n\end{pmatrix} \tag{4-45}$$

将微分方程组写成矢量形式，其优点在于，这种形式与坐标系选取无关。在讨论由式(4-44)表述的某一物理问题时，我们可选用对该问题尽可能简单的坐标系。

自然，k 个梯度必将有 nk 个分量。通过坐标系的选取，空间一点 P 沿 $(n-1)$ 坐标轴方向的分量均可任意给定，于是式(4-44)成为用以确定其余 k 个分量的方程组。但可能存在某一平面 E，对平行于 E 的给定的 $k(n-1)$ 个梯度之分量而言，方程组(4-44)不能确定其余和 E 垂直的 k 个分量，这种平面我们称为特征平面，下面我们来寻找这类平面。

先对方程组(4-44)进行线性组合如下：

将方程组(4-44)对应乘以实数因子 $d_\alpha(\alpha=1, 2, 3, \cdots, k)$ 然后相加，得

$$d_\alpha\boldsymbol{a}_{\alpha\mu}\cdot\mathrm{grad}u_\mu=d_\alpha b_\alpha$$

或

$$\boldsymbol{A}_\mu\cdot\mathrm{grad}u_\mu=B \tag{4-46}$$

式中 $\boldsymbol{A}_\mu=d_\alpha\boldsymbol{a}_{\alpha\mu}$；$B=d_\alpha b_\alpha$

方程(4-46)是由方程组(4-44)直接得到的，因而，无论乘积因子d_α如何选取，方程组(4-44)的解始终满足方程(4-46)。

方程(4-46)的左边是矢量之数性积的和，其中的每一项$\boldsymbol{A}_\mu\cdot$ gradu_μ ($\boldsymbol{A}_\mu$为$\boldsymbol{a}_{\alpha\mu}$的线性组合)，均可看成是$\boldsymbol{A}_\mu$的绝对值乘以grad$u_\mu$在$\boldsymbol{A}_\mu$方向的投影，如果对$d_\alpha$作某种选择($d_\alpha$不全为零)，致使矢量$\boldsymbol{A}_\mu$均与公共平面$E$平行，则grad$u_\mu$在$\boldsymbol{A}_\mu$方向的投影分量也必然和公共平面$E$相平行，即grad$u_k$将不存在和平面$E$相垂直的分量，或方程(4-46)左边的线性组合中不包含有和平面E相垂直的分量，根据定义，这一平面E即为特征平面。除此以外，在$\boldsymbol{A}_\mu$平行于E的情况下，$(n-1)k$个梯度分量存在线性关系，因而不能任意指定。

下面来具体求找这样的平面E。显然，待确定的平面E可用其单位法向矢量$\boldsymbol{\lambda}$表征。

由于$\boldsymbol{A}_\mu$均与$\boldsymbol{\lambda}$相垂直(或$\boldsymbol{A}_\mu$与E平行)，因而必有

$$\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{A}_1=0;\ \boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{A}_\alpha=0;\ \cdots;\ \boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{A}_k=0$$

或

$$\begin{aligned}
&d_1(\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{a}_{11})+d_2(\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{a}_{21})+\cdots+d_k(\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{a}_{k1})=0\\
&d_1(\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{a}_{12})+d_2(\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{a}_{22})+\cdots+d_k(\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{a}_{k2})=0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&d_1(\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{a}_{1k})+d_2(\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{a}_{2k})+\cdots+d_k(\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{a}_{kk})=0
\end{aligned}\tag{4-47}$$

如果$d_1, d_2, \cdots, d_k$存在非零解，则必有

$$\begin{vmatrix}
\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{a}_{11} & \boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{a}_{21}\cdots\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{a}_{k1}\\
\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{a}_{12} & \boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{a}_{22}\cdots\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{a}_{k2}\\
\cdots & \cdots\cdots\\
\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{a}_{1k} & \boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{a}_{2k}\cdots\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{a}_{kk}
\end{vmatrix}=0\tag{4-48}$$

式(4-48)是$\boldsymbol{\lambda}$为特征平面法向单位矢量的充分条件(必要条件不证)。

解出行列式(4-48)，可确定特征方向$\boldsymbol{\lambda}^*$，从而可通过式

(4-47)解出 d_a^*，将 d_a^* 代入 (4-46)，得

$$A_\mu^* \cdot \mathrm{grad} u_\mu = B^* \tag{4-49}$$

式(4-49)称相容关系式

(二) 斜交曲线坐标系下，定常超音速流动的特征线解法

在斜交曲线坐标系下，当坐标系选定以后，定常超音速流动共有五个待求函数，它们是，压力 p、密度 ρ 以及三个速度分量 (v^i 或 v_i)，因而 $k=5$。共有三个自变量 x^i，即 $n=3$。对于这种流动，显然应当有五个方程。这五个方程是：

1. 连续方程，为

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial(\rho\sqrt{g}V^i)}{\partial x^i}=0$$

或

$$\rho\left(\frac{\partial V^i}{\partial x^i}\right)+V^i\frac{\partial \rho}{\partial x^i}+\frac{\rho}{2}V^i\frac{\partial \ln g}{\partial x^i}=0 \tag{a}$$

2. 运动方程，为

$$V^i\frac{\partial V^i}{\partial x^i}+V^kV^l\Gamma_{kl}^i+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x^l}g^{il}=0 \tag{b}$$

式中"i"为指定指标，因而式(b)实际包含三个方程。

3. 音速方程

由

$$\frac{\rho}{kp}\frac{Dp}{Dt}=\frac{D\rho}{Dt} \quad 令 a^2=\frac{kp}{\rho} 及 \frac{\partial p}{\partial t}=\frac{\partial \rho}{\partial t}=0,$$

因而有

$$V^i\frac{\partial \rho}{\partial x^i}=\frac{1}{a^2}\frac{\partial p}{\partial x^i}V^i \tag{c}$$

利用式(c)，可将连续方程改写成

$$\frac{1}{a^2}V^i\frac{\partial p}{\partial x^i}+\rho\frac{\partial V^i}{\partial x^i}+\frac{\rho V^i}{2}\frac{\partial(\ln g)}{\partial x^i}=0$$

于是，四个方程为

$$\rho\left(\frac{\partial V^1}{\partial x^1}+\frac{\partial V^2}{\partial x^2}+\frac{\partial V^3}{\partial x^3}\right)+\frac{1}{a^2}\left(V^1\frac{\partial p}{\partial x^1}+V^2\frac{\partial p}{\partial x^2}+V^3\frac{\partial p}{\partial x^3}\right)$$

$$=-\frac{\rho}{2}V^i\frac{\partial(\ln g)}{\partial x^i}$$

$$\left(V^1\frac{\partial V^1}{\partial x^1}+V^2\frac{\partial V^1}{\partial x^2}+V^3\frac{\partial V^1}{\partial x^3}\right)$$

$$+\frac{1}{\rho}\left(g^{11}\frac{\partial p}{\partial x^1}+g^{12}\frac{\partial p}{\partial x^2}+g^{13}\frac{\partial p}{\partial x^3}\right)=-V^kV^l\Gamma^1_{kl}$$

$$\left(V^1\frac{\partial V^2}{\partial x^1}+V^2\frac{\partial V^2}{\partial x^2}+V^3\frac{\partial V^2}{\partial x^3}\right)$$

$$+\frac{1}{\rho}\left(g^{21}\frac{\partial p}{\partial x^1}+g^{22}\frac{\partial p}{\partial x^2}+g^{23}\frac{\partial p}{\partial x^3}\right)=-V^kV^l\Gamma^2_{kl}$$

$$\left(V^1\frac{\partial V^3}{\partial x^1}+V^2\frac{\partial V^3}{\partial x^2}+V^3\frac{\partial V^3}{\partial x^3}\right)$$

$$+\frac{1}{\rho}\left(g^{31}\frac{\partial p}{\partial x^1}+g^{32}\frac{\partial p}{\partial x^2}+g^{33}\frac{\partial p}{\partial x^3}\right)=-V^kV^l\Gamma^3_{kl}\qquad(4\text{-}50)$$

由式(4-50),立即可得

$$\boldsymbol{a}_{11}=(\rho,\ 0,\ 0);\ \boldsymbol{a}_{12}=(0,\ \rho,\ 0);\ \boldsymbol{a}_{13}=(0,\ 0,\ \rho);$$

$$\boldsymbol{a}_{14}=\left(\frac{1}{a^2}V^1,\ \frac{1}{a^2}V^2,\ \frac{1}{a^2}V^3\right)$$

$$\boldsymbol{a}_{21}=(V^1,\ V^2,\ V^3);\ \boldsymbol{a}_{22}=(0,\ 0,\ 0);\ \boldsymbol{a}_{23}=(0,\ 0,\ 0);$$

$$\boldsymbol{a}_{24}=\left(\frac{1}{\rho}g^{11},\ \frac{1}{\rho}g^{12},\ \frac{1}{\rho}g^{13}\right)$$

$$\boldsymbol{a}_{31}=(0,\ 0,\ 0);\ \boldsymbol{a}_{32}=(V^1,\ V^2,\ V^3);\ \boldsymbol{a}_{33}=(0,\ 0,\ 0);$$

$$\boldsymbol{a}_{34}=\left(\frac{1}{\rho}g^{21},\ \frac{1}{\rho}g^{22},\ \frac{1}{\rho}g^{32}\right)$$

$$\boldsymbol{a}_{41}=(0,\ 0,\ 0);\ \boldsymbol{a}_{42}=(0,\ 0,\ 0);\ \boldsymbol{a}_{43}=(V^1,\ V^2,\ V^3);$$

$$\boldsymbol{a}_{44}=\left(\frac{1}{\rho}g^{31},\ \frac{1}{\rho}g^{32},\ \frac{1}{\rho}g^{33}\right)\qquad(4\text{-}51)$$

令 d_1、d_2、d_3、d_4 为四个实数,分别与式(4-50)各分式相乘,然

后相加，即得方程(4 46)。其中

$$\boldsymbol{A}_1=d_1\boldsymbol{a}_{11}+d_2\boldsymbol{a}_{21}+d_3\boldsymbol{a}_{31}+d_4\boldsymbol{a}_{41}$$
$$\boldsymbol{A}_2=d_1\boldsymbol{a}_{12}+d_2\boldsymbol{a}_{22}+d_3\boldsymbol{a}_{32}+d_4\boldsymbol{a}_{42}$$
$$\boldsymbol{A}_3=d_1\boldsymbol{a}_{13}+d_2\boldsymbol{a}_{23}+d_3\boldsymbol{a}_{33}+d_4\boldsymbol{a}_{43}$$
$$\boldsymbol{A}_4=d_1\boldsymbol{a}_{14}+d_2\boldsymbol{a}_{24}+d_3\boldsymbol{a}_{34}+d_4\boldsymbol{a}_{44}$$
$$B=d_1b_1+d_2b_2+d_3b_3+d_4b_4$$

前四式分别和 $\boldsymbol{\lambda}$ 作数性积，并令

$$\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{A}_1=\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{A}_2=\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{A}_3=\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{A}_4=0$$

则有

$$d_1(\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{a}_{11})+d_2(\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{a}_{21})+d_3(\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{a}_{31})+d_4(\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{a}_{41})=0$$
$$d_1(\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{a}_{12})+d_2(\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{a}_{22})+d_3(\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{a}_{32})+d_4(\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{a}_{42})=0$$
$$d_1(\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{a}_{13})+d_2(\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{a}_{23})+d_3(\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{a}_{33})+d_4(\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{a}_{43})=0$$
$$d_1(\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{a}_{14})+d_2(\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{a}_{24})+d_3(\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{a}_{34})+d_4(\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{a}_{44})=0$$

令上述方程的系数行列式为零，即

$$\Delta=\begin{vmatrix}\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{a}_{11} & \boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{a}_{21} & \boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{a}_{31} & \boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{a}_{41}\\ \boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{a}_{12} & \boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{a}_{22} & \boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{a}_{32} & \boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{a}_{42}\\ \boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{a}_{13} & \boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{a}_{23} & \boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{a}_{33} & \boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{a}_{43}\\ \boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{a}_{14} & \boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{a}_{24} & \boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{a}_{34} & \boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{a}_{44}\end{vmatrix}=0$$

将式(4 51)中各对应矢量代入上式，则得

$$\Delta=\begin{vmatrix}\rho\lambda_1 & Q & 0 & 0\\ \rho\lambda_2 & 0 & Q & 0\\ \rho\lambda_3 & 0 & 0 & Q\\ \dfrac{Q}{a^2} & \dfrac{1}{\rho}\lambda^1 & \dfrac{1}{\rho}\lambda^2 & \dfrac{1}{\rho}\lambda^3\end{vmatrix}=Q^2\left[(\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{\lambda})-\frac{Q^2}{a^2}\right]=0$$

式中 $Q=\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{v}$，由于 $\boldsymbol{\lambda}$ 为单位法向矢量，因而

$$\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{\lambda}=0$$

这样，上列行列式简化为：

$$Q^3=0; Q^2-a^2=0$$

或
$$Q_{1,2}=0; Q_{3,4}=\pm a$$

下面对这两种情况分别加以讨论。

第一种情况：当 $Q=0$ 时，有

$$\begin{bmatrix} \rho\lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ \rho\lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ \rho\lambda_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho}\lambda^1 & \frac{1}{\rho}\lambda^2 & \frac{1}{\rho}\lambda^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix}=0$$

或

$$\lambda_1 d_1=0; \lambda_2 d_1=0; \lambda_3 d_1=0; \lambda^1 d_2+\lambda^2 d_3+\lambda^3 d_4=0$$

于是可得
$$d_1=0, d_2=V_1; d_3=V_2; d_4=V_3$$

对于这种情况，可求得流面方程如下

1．特征面（流面）方程

$$\text{由 } \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\lambda}=0 \text{ 可得 } d\boldsymbol{r}_P\times\boldsymbol{v}=0$$

此处 $d\boldsymbol{r}_P$ 为流面上沿速度 $\boldsymbol{v}$ 方向的微元位置矢量，由

$$d\boldsymbol{r}_P=\boldsymbol{e}_i dx^i; \boldsymbol{v}=\boldsymbol{e}_j V^j$$

因而有
$$d\boldsymbol{r}_P\times\boldsymbol{v}=(\boldsymbol{e}_i\times\boldsymbol{e}_j)V^j dx^i=0$$

或
$$d\boldsymbol{r}_P\times\boldsymbol{v}=\varepsilon_{ijk}\boldsymbol{e}^k\sqrt{g}\,V^j dx^i=0$$

$$dx^1V^2=dx^2V^1; dx^2V^3=dx^3V^2, dx^1V^3=dx^3V^1$$

即为流线方程

2．特征关系式

将 $d_1=0; d_2=V_1; d_3=V_2; d_4=V_3$ 分别代入式(4-49)，可得

$$V_1\left(V^l\frac{\partial V^1}{\partial x^l}\right)+\frac{1}{\rho}V_1 g^{1l}\frac{\partial p}{\partial x^l}+V_1(V^kV^l\Gamma^1_{kl})$$

$$+V_2\left(V^l\frac{\partial V^2}{\partial x^l}+V^kV^l\Gamma^2_{kl}+\frac{1}{\rho}g^{2l}\frac{\partial p}{\partial x^l}\right)$$

$$+V_3\left(V^l\frac{\partial V^3}{\partial x^l}+V^kV^l\Gamma^3_{kl}+\frac{1}{\rho}g^{3l}\frac{\partial p}{\partial x^l}\right)=0$$

或

$$V_q\left(V^l\frac{\partial v^q}{\partial x^l}+V^kV^l\Gamma^q_{kl}\right)+\frac{1}{\rho}V_q\left(g^{ql}\frac{\partial p}{\partial x^l}\right)=0$$

由于

$$\left(\frac{D\boldsymbol{v}}{Dt}\right)^q=V^l\frac{\partial V^q}{\partial x^l}+V^kV^l\Gamma^q_{kl}$$

$$(\nabla p)^q=g^{ql}\frac{\partial p}{\partial x^l}$$

因而上式可改写成

$$V_q\left(\frac{D\boldsymbol{v}}{Dt}\right)^q+\frac{1}{\rho}v_q(\nabla p)^q=0$$

或

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{v}\cdot\frac{D\boldsymbol{v}}{Dt}+\frac{1}{\rho}\boldsymbol{v}\cdot\nabla p=0\\&\frac{D}{Dt}\left(\frac{v^2}{2}\right)+\frac{1}{\rho}\frac{Dp}{Dt}=0\\&d\left(\frac{v^2}{2}\right)+\frac{1}{\rho}dp=0\end{aligned}\right\}\tag{4-52}$$

式(4-52)所表示的相容关系式，就是欧拉方程的微分形式，这正表示，$Q_{1,2}=0$（或 $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\lambda}=0$）代表着流面。

第二种情况：$Q_{3,4}=\pm a$

由 $Q=\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\lambda}$，因而 $Q_{3,4}=\pm a$ 可写成

$$(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\lambda})_{3,4}=\pm a$$

如图 4-8 所示，点 P 的扰动必将沿马赫锥向下游传播，而马赫锥锥角 μ 即为

$$\mu=\sin^{-1}\frac{a}{v}$$

其锥面为特征面，而特征面的外法线 $\boldsymbol{\lambda}$ 与速度 $\boldsymbol{v}$ 则交成 $\frac{\pi}{2}+\mu$ 角，

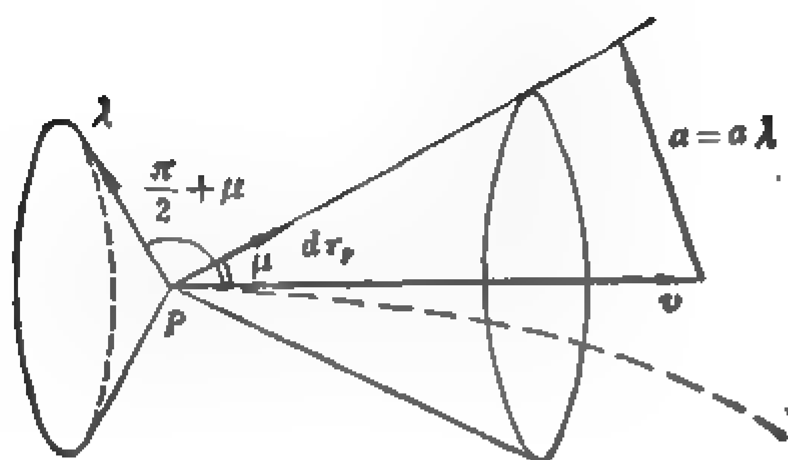


图 4-8

因而

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\lambda}=v\cos\left(\frac{\pi}{2}+\mu\right)=-v\sin\mu=-a$$

(1) 锥面方程

如图 4-8 所示，过 P 点取一微元位置矢量 $d\boldsymbol{r}_P$，则

$$d\boldsymbol{r}_P\cdot\boldsymbol{v}=|d\boldsymbol{r}_P|\,|\boldsymbol{v}|\cos\mu$$

但

$$\cos\mu=\frac{\sqrt{v^2-a^2}}{|\boldsymbol{v}|}$$

于是

$$d\boldsymbol{r}_P\cdot\boldsymbol{v}=|d\boldsymbol{r}_P|\sqrt{v^2-a^2}$$

显然，以上结果只有当 $v>a$ 时成立，由于

$$d\boldsymbol{r}_P=\boldsymbol{e}_i dx^i,\quad \boldsymbol{v}=\boldsymbol{e}_j v^j$$

因而

$$d\boldsymbol{r}_P\cdot\boldsymbol{v}=g_{ij}dx^iV^j$$

$$g_{ij}dx^iv^j=\sqrt{g_{ij}dx^idx^j}\sqrt{v^2-a^2}$$

即

$$(g_{ij}dx^iV^j)^2=g_{ij}dx^idx^j(v^2-a^2)$$

或

$$(V_idx^i)^2=g_{ij}dx^idx^j(v^2-a^2)$$

展开之，可得

$$\begin{aligned}&[(V_1)^2-(v^2-a^2)g_{11}](dx^1)^2+[(V_2)^2-(v^2-a^2)g_{22}](dx^2)^2\\&\quad+[(V_3)^2-(v^2-a^2)g_{33}](dx^3)^2+2[V_1V_2\\&\quad-(v^2-a^2)g_{12}]dx^1dx^2+2[V_2V_3-(v^2-a^2)g_{23}]dx^2dx^3\end{aligned}$$

$$+2[V_1V_3-(v^2-a^2)g_{13}]dx^1dx^3=0 \tag{4-53}$$

如退化为笛卡尔坐标系，则必有

$$[v_x^2-(v^2-a^2)]dx\,dx+[v_y^2-(v^2-a^2)]dy\,dy$$
$$+[v_z^2-(v^2-a^2)]dz\,dz+2v_xv_ydx\,dy+2v_yv_zdy\,dz$$
$$+2v_xv_zdx\,dz=0 \tag{4-53'}$$

如果是平面流动，则有

$$(v_y^2-a^2)(dx)^2+(v_x^2-a^2)(dy^2)+2(v_xv_y)dx\,dy=0$$

或
$$(a^2-v_y^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+(a^2-v_x^2)-2v_xv_y\left(\frac{dy}{dx}\right)=0$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{v_xv_y\pm a\sqrt{v^2-a^2}}{a^2-v_y^2}$$

若退化为圆柱坐标系，则有

$$[v_r^2-(v^2-a^2)](dr)^2+[(v_\varphi)^2-(v^2-a^2)](rd\varphi)^2$$
$$+(v_z^2-(v^2-a^2)](dz)^2+2rv_rv_\varphi drd\varphi$$
$$+2v_rv_zdr\,dz+2v_\varphi v_zd\varphi\,dz=0 \tag{4-53''}$$

(2) 相容方程

取 $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\lambda}=-a$，则有

$$\begin{bmatrix} \rho\lambda_1 & -a & 0 & 0 \\ \rho\lambda_2 & 0 & -a & 0 \\ \rho\lambda_3 & 0 & 0 & -a \\ -\frac{1}{a} & \frac{1}{\rho}\lambda^1 & \frac{1}{\rho}\lambda^2 & \frac{1}{\rho}\lambda^3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix}=0$$

或
$$\rho\lambda_1d_1-ad_2=0$$
$$\rho\lambda_2d_1-ad_3=0$$
$$\rho\lambda_3d_1-ad_4=0$$
$$-\frac{1}{a}d_1+\frac{1}{\rho}\lambda^1d_2+\frac{1}{\rho}\lambda^2d_3+\frac{1}{\rho}\lambda^3d_4=0$$

于是

$$d_2=\frac{\rho\lambda_1}{a}d_1;\ d_3=\frac{\rho\lambda_2}{a}d_1;\ d_4=\frac{\rho\lambda_3}{a}d_1 \tag{4-54}$$

将以上结果代入式(4-49)，立即可得

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{a^2}V^l\frac{\partial p}{\partial x^l}+\rho\frac{\partial V^l}{\partial x^l}+\rho\frac{V^l}{2}\frac{\partial(\ln g)}{\partial x^l}\\
&\quad+\frac{\rho\lambda_1}{a}\left(V^l\frac{\partial V^1}{\partial x^l}+V^kV^l\Gamma^1_{kl}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x^l}g^{1l}\right)\\
&\quad+\frac{\rho\lambda_2}{a}\left(V^l\frac{\partial V^2}{\partial x^l}+V^kV^l\Gamma^2_{kl}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x^l}g^{2l}\right)\\
&\quad+\frac{\rho\lambda_3}{a}\left(V^l\frac{\partial V^3}{\partial x^l}+V^kV^l\Gamma^3_{kl}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x^l}g^{3l}\right)=0
\end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{a^2}V^l\frac{\partial p}{\partial x^l}+\rho\frac{\partial V^l}{\partial x^l}+\rho\frac{V^l}{2}\frac{\partial(\ln g)}{\partial x^l}\\
&\quad+\frac{\rho}{a}\left(\lambda_qV^l\frac{\partial v^q}{\partial x^l}+\lambda_qV^kV^l\Gamma^q_{kl}\right)+\frac{\rho}{a}\lambda_q\frac{\partial p}{\partial x^l}g^{ql}=0
\end{aligned}$$

由于

$$\lambda_q\left(V^l\frac{\partial v^q}{\partial x^l}+V^kV^l\Gamma^q_{kl}\right)=\boldsymbol{\lambda}\cdot\left(\frac{D\boldsymbol{v}}{Dt}\right)$$

$$\lambda_q\left(\frac{\partial p}{\partial x^l}g^{ql}\right)=\boldsymbol{\lambda}\cdot\nabla p$$

因而，上式又可改写成

$$\frac{1}{a^2}V^l\frac{\partial p}{\partial x^l}+\rho\frac{\partial V^l}{\partial x^l}+\rho\frac{V^l}{2}\frac{\partial(\ln g)}{\partial x^l}+\frac{\rho}{a}\boldsymbol{\lambda}\cdot\left(\frac{D\boldsymbol{v}}{Dt}+\frac{1}{\rho}\nabla p\right)=0$$

或

$$\frac{1}{a^2}\frac{Dp}{Dt}+\rho\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}+\frac{\rho}{a}\boldsymbol{\lambda}\cdot\left(\frac{D\boldsymbol{v}}{Dt}+\frac{1}{\rho}\nabla p\right)=0$$

由 $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\lambda}=-a$，则对上式稍加改写，立即可得更为简单的相容关系式如下：

$$\boldsymbol{\lambda}\cdot\left[\left(\frac{D\boldsymbol{v}}{Dt}+\frac{1}{\rho}\nabla p\right)-\left(\frac{1}{\rho a^2}\boldsymbol{v}\frac{Dp}{Dt}+\boldsymbol{v}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}\right)\right]=0 \tag{4-55}$$

由于 $$\frac{D\boldsymbol{v}}{Dt}+\rho\nabla p=0$$

为欧拉方程，它对任何方向均成立，因而式(4-55)又可简写为

$$\boldsymbol{\lambda}\cdot\left[\frac{1}{\rho a^2}\boldsymbol{v}\frac{Dp}{Dt}+\boldsymbol{v}(\mathrm{div}\boldsymbol{v})\right]=0$$

或

$$\frac{1}{\rho a}\frac{Dp}{Dt}+a\mathrm{div}\boldsymbol{v}=0 \qquad (4\text{-}55')$$

由 $$\frac{1}{\rho}\frac{Dp}{Dt}+v\frac{Dv}{Dt}=\frac{1}{\rho}\frac{Dp}{Dt}+\frac{D}{Dt}\left(\frac{v^2}{2}\right)=0$$

或 $$\frac{1}{\rho}\frac{Dp}{Dt}=-\frac{D}{Dt}\left(\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}}{2}\right)=-V_j\left(\frac{D\boldsymbol{v}}{Dt}\right)^j$$

将以上结果代入式(4-55)′并应用$\left(\frac{D\boldsymbol{v}}{Dt}\right)^j$的表达式，则可得张量形式的相容关系式

$$v_j\left(\frac{D\boldsymbol{v}}{Dt}\right)^j-a^2\left[\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial(\sqrt{g}V^j)}{\partial x^j}\right]=0$$

或 $$V_j\left(V^i\frac{\partial V^j}{\partial x^i}+V^iV^k\Gamma^j_{ik}\right]-a^2\left[\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial(\sqrt{g}V^j)}{\partial x^j}\right]=0$$

对于笛卡尔坐标系下的平面运动，则由于

$$V^1=v_x,\ V^2=v_y,\ V^3=0$$

$$\sqrt{g}=1,\ g_{11}=g_{22}=g_{33}=1 \quad g_{ij}(i\neq j)=0$$

$$\Gamma^j_{ik}=0$$

式(4-55)″可改写成

$$\left[v_x^2\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y^2\frac{\partial v_y}{\partial y}+v_xv_y\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial x}\right)\right]$$

$$-a^2\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)=0$$

整理之得

$$(a^2-v_x^2)\frac{\partial v_x}{\partial x}+(a^2-v_y^2)\frac{\partial v_y}{\partial y}-v_xv_y\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial x}\right)=0$$

利用无旋条件，则可将上述方程改写为

$$\left(1-\frac{v_x^2}{a^2}\right)\frac{\partial v_x}{\partial x}+\left(1-\frac{v_y^2}{a^2}\right)\frac{\partial v_y}{\partial y}-2\frac{v_xv_y}{a^2}\frac{\partial v_x}{\partial y}=0 \quad (4\text{-}56)$$

由式(4-56) 以及式 (4-53)′ 可求得沿特征线的相容关系式如下：

令 $\zeta=\frac{dy}{dx}$，则

$$\frac{dv_x}{dx}=\frac{\partial v_x}{\partial x}+\zeta\frac{\partial v_x}{\partial y};\ \frac{dv_y}{dx}=\frac{\partial v_y}{\partial x}+\zeta\frac{\partial v_y}{\partial y}$$

应用无旋条件，则上两式可归并为

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}=\frac{dv_x}{dx}-\zeta\frac{dv_y}{dx}+\zeta^2\frac{\partial v_y}{\partial y}$$

代入式(4-56)，得

$$\left(1-\frac{v_x^2}{a^2}\right)\frac{dv_x}{dx}-\left[\left(1-\frac{v_x^2}{a^2}\right)\zeta+\frac{\partial v_xv_y}{a^2}\right]\frac{dv_y}{vx}$$

$$+\left[\left(1-\frac{v_x^2}{a^2}\right)\zeta^2+\frac{2v_xv_y}{a^2}\zeta+1-\frac{v_y^2}{a^2}\right]\frac{\partial v_y}{\partial y}=0$$

上式中最后一项为零，于是有

$$\frac{dv_x}{dv_y}=\frac{v_xv_y\pm a\sqrt{v^2-a^2}}{a^2-v_x^2} \quad (4\text{-}57)$$

式(4-57)即为平面流动之速度平面特征线的斜率表达式。

附录 I 位移张量元素的几何解释

无论是流体力学还是固体力学，位移张量都具有重要的地位，这里首先对笛卡尔坐标系下的位移张量元素 D_{ij} 作些讨论，然后以平面极坐标系为例，得出曲线坐标系下 $\nabla_i v^j$ 的几何解释。

1．笛卡尔坐标系下，D_{ij} 的几何解释

对于笛卡尔坐标系下，位移张量元素 D_{ij} 可分成两类，一类是 $i=j$，另一类是 $i\neq j$。现以 D_{11}、D_{12} 为例，阐明它们的几何意义，然后加以推广。

1、D_{11} 的几何解释

由位移张量 D 的定义式，可写成

$$D_{11}=\frac{\partial v_1}{\partial y_1}$$

假设 $v_1=v_1(y_1,\ y_2,\ y_3)$，$v_2=v_3=0$。如图 I-1 所示，设在 t 瞬时沿 Oy_1 轴方向取两点 P、Q，其坐标分别为 (y_1,y_2,y_3)、$(y_1+\delta y_1,\ y_2,\ y_3)$，经过 dt 以后，位于 P 点的流体微团(或质点)运动到 P'，位于 Q 点的流体微团则运动到 Q'，已知 P 点处在 t 瞬时流体微团的速度为 $v_{P1}=v_{P1}(y_1,\ y_2,\ y_3)$，则

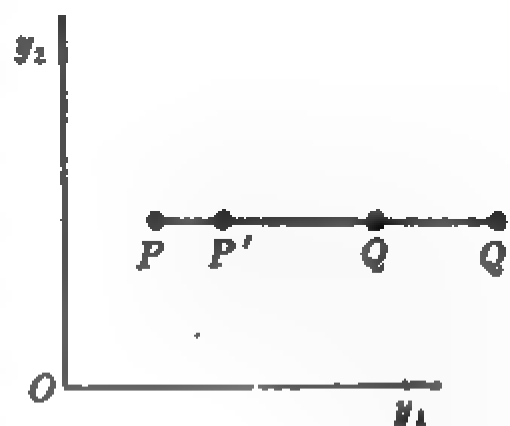


图 I-1

$v_{Q1}=v_{Q1}(y_1+\delta y_1,\ y_2,\ y_3)$，于是

$$PP'=v_{P1}\,dt,\ QQ'=v_{Q1}\,dt$$

在一般情况下，由于 $v_{P1} \neq v_{Q1}$ 因而 $PP' \neq QQ'$。如令 $PQ = \delta y_1$，$P'Q' = \delta y_1 + d(\delta y_1)$，则

$$P'Q' - PQ = d(\delta y_1) = (P'Q + QQ') - (PP' + P'Q)$$
$$= QQ' - PP'$$

或
$$d(\delta y_1) = (v_{Q1} - v_{P1})dt = \frac{\partial v_1}{\partial y_1}\delta y_1 dt = D_{11}\delta y_1 dt$$

$$D_{11} = \frac{\partial v_1}{\partial y_1} = \frac{d(\delta y_1)}{\delta y_1 dt}$$

上式的几何意义是很明显的，$d(\delta y_1)$ 表示时间推移 dt 以后 δy_1 的伸长，当除以 δy_1 及 dt 以后，则表示单位长度、单位时间的伸长，因而 D_{11} 表示沿 Oy_1 方向单位长度的伸长率。对于 D_{22}、D_{33} 也可作出类似的几何解释。

应用以上结果，可进一步得到速度 $\boldsymbol{v}$ 的散度 $\mathrm{div}\boldsymbol{v}$ 的几何解释如下：

如以 δy_1、δy_2、δy_3 为棱边构成体积 δv，则

$$\delta v = \delta y_1 \delta y_2 \delta y_3$$

经过时间 dt 以后，各微元长度分别伸长到

$$\delta y_1'、\delta y_2'、\delta y_3'$$

于是
$$\delta y_1' = \delta y_1 + d(\delta y_1) = \delta y_1 + \frac{\partial v_1}{\partial y_1}\delta y_1 dt$$

$$\delta y_2' = \delta y_2 + d(\delta y_2) = \delta y_2 + \frac{\partial v_2}{\partial y_2}\delta y_2 dt$$

$$\delta y_3' = \delta y_3 + d(\delta y_3) = \delta y_3 + \frac{\partial v_3}{\partial y_3}\delta y_3 dt$$

而由它们所构成的体积，为

$$\delta V' = \delta V + d(\delta V) = \delta y_1'、\delta y_2' \delta y_3'$$
$$= \left(1 + \frac{\partial v_1}{\partial y_1}dt\right)\left(1 + \frac{\partial v_2}{\partial y_2}dt\right)\left(1 + \frac{\partial v_3}{\partial y_3}dt\right)\delta y_1 \delta y_2 \delta y_3$$

将上式展开并略去高阶小量，则可改写为

$$\delta V' = \left[1+\left(\frac{\partial v_1}{\partial y_1}+\frac{\partial v_2}{\partial y_2}+\frac{\partial v_3}{\partial y_3}\right)dt\right]\delta y_1\delta y_2\delta y_3$$

或
$$\delta V' = \left[1+\left(\frac{\partial v_1}{\partial y_1}+\frac{\partial v_2}{\partial y_2}+\frac{\partial v_3}{\partial y_3}\right)dt\right]\delta V$$

$$\frac{\delta V'-\delta V}{\delta v\, dt} = \frac{d(\delta V)}{\delta v\, dt} = \left(\frac{\partial v_1}{\partial y_1}+\frac{\partial v_2}{\partial y_2}+\frac{\partial v_3}{\partial y_3}\right) = \mathrm{div}\boldsymbol{v}$$

即速度 $\boldsymbol{v}$ 的散度表示微元体积 δV 的相对变化率。

2、D_{12} 的几何解释

由 D_{ij} 的定义，如令 $i=1$, $j=2$，则

$$D_{12} = \frac{\partial v_1}{\partial y_2}$$

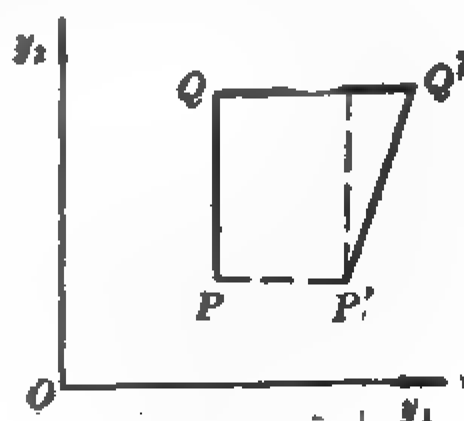


图 I 2

现仍假定 $v_1 = v_1(y_1,\ y_2,\ y_3)$, $v_2 = 0$, $v_3 = 0$。沿 Oy_2 方向取一微元长度 $\delta y_2(PQ)$，并令

$$P(y_1,\ y_2,\ y_3);\ Q(y_1,\ y_2+\delta y_2,\ y_3)$$

$$v_{P1} = v_{P1}(y_1,\ y_2,\ y_3);\ v_{Q1} = v_{Q1}(y_1,\ y_2+Oy_2,\ y_3)$$

经过 dt 以后，位于 P、Q 的流体微团分别沿 Oy_1 方向运动到 P'、Q'，而

$$PP' = v_{P1}dt;\ QQ' = v_{Q1}dt$$

现假设 $v_{Q1} > v_{P1}$；则

$$QQ' - PP' = (v_{Q1} - v_{P1})dt = \frac{\partial v_1}{\partial y_2}\delta y_2 dt$$

上式左边是 Q 点对于 P 点的相对位移，如果变形很小，则 $QQ' - PP'$ 可看作微元弧长，而

$$\frac{QQ'-PP'}{\delta y_2 dt} = \frac{\partial v_1}{\partial y_2}$$

则可看作 PQ 的旋转角速度 ω_{PQ} 取负值(按照习惯，转动角速度 ω

以反时针方向为正，当 $\frac{\partial v_1}{\partial y_2}>0$ 时，$\omega_{PQ}<0$)，即

$$\omega_{PQ}=-\frac{\partial v_1}{\partial y_2}$$

完全类似，如过 P 点沿 Oy_1 方向取一点 R，并令 $v_1=0$，$v_2=v_2(y_1, y_2, y_3)$，$v_3=0$。则重复以上讨论可得

$$\omega_{PR}=\frac{\partial v_2}{\partial y_1}$$

即 $\frac{\partial v_2}{\partial y_1}$ 可看作 PR 的旋转角速度 $\omega_{PR}\left(\frac{\partial v_2}{\partial y_1}>0\text{ 时}, \omega_{PR}>0\right)$。

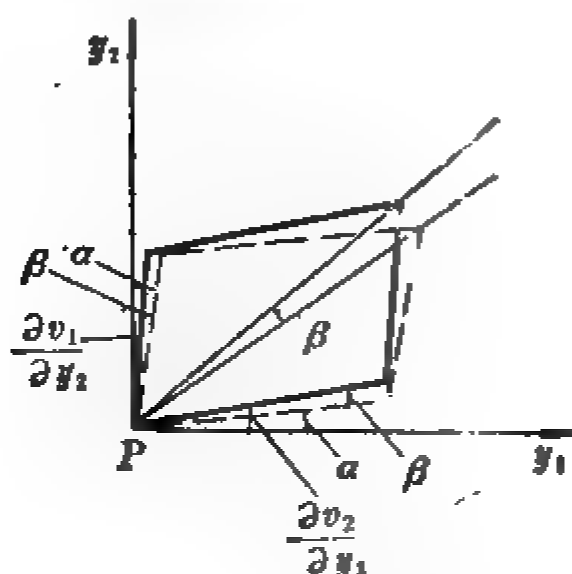


图 I-8

综合以上讨论可知，D_{ij} 的各元素，对 $i=j$ 的各元素表征了法向变形；而 $i\neq j$ 的诸元素则表征了切向变形，对于切向变形，还可以分解为纯剪切变形和拟刚体转动两种。

如图 I-8 所示，设 $v_1=v_1(y_1, y_2, y_3)$，$v_2=v_2(y_1, y_2, y_3)$，$v_3=0$，取 δy_1、δy_2、δy_3 为棱边的六面体。如果只计及相对运动而不考虑法向变形，则经过单位时间以后 δy_1、δy_2 分别转过

$$\frac{\partial v_2}{\partial y_1},\quad \frac{\partial v_1}{\partial y_2}$$

的角度，此四面体发生变形运动。现将这种变形运动分两步完成，首先 δy_1、δy_2 在单位时间内同时转过 α 角（对角线不转动），落入图上虚线位置，然后将六面体看作刚体转过 β 角（六面体不变形）和最后变形重合一致，则

$$\alpha+\beta=\frac{\partial v_2}{\partial y_1},\ \alpha-\beta=\frac{\partial v_1}{\partial y_2}$$

$$\alpha=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_2}{\partial y_1}+\frac{\partial v_1}{\partial y_2}\right)$$

$$\beta=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_2}{\partial y_1}-\frac{\partial v_1}{\partial y_2}\right)$$

至此，可把六面体在 Py_2y_3 平面内的变形运动分解为

(1) 纯剪切变形——$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_2}{\partial y_1}+\frac{\partial v_1}{\partial y_2}\right)$

这种变形，对角线不发生转动。

(2) 拟刚体转动——$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_2}{\partial y_1}-\frac{\partial v_1}{\partial y_2}\right)$

六面体不变形，而是象刚体一样以 $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_2}{\partial y_1}-\frac{\partial v_1}{\partial y_2}\right)$的转动角速度旋转。

令

$$\varepsilon_{12}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_2}{\partial y_1}+\frac{\partial v_1}{\partial y_2}\right)$$

$$\omega_3=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_2}{\partial y_1}-\frac{\partial v_1}{\partial y_2}\right)$$

则两者结合代表了介质的剪切变形。

除此以外，由于

$$\omega_{PR}=\frac{\partial v_2}{\partial y_1};\ \omega_{PQ}=-\frac{\partial v_1}{\partial y_2}$$

因而

$$\omega_3=\frac{1}{2}(\omega_{PR}+\omega_{PQ})$$

已知 $PR\perp PQ$，因而，拟刚体的旋转角速度 ω_3 可理解为相互垂直的两棱边(PR 或 δy_1. PQ 或 δy_2)旋转角速度的算术平均。

以上讨论了笛卡尔坐标系下，位移张量元素的几何解释，虽然有一定的局限性，但一些基本结论仍然适用。

(二) 斜交曲线坐标下，$\nabla_i V^i$ 的几何解释

对于任意斜交曲线坐标系的情况，难以用简单的几何关系来说明位移张量元素，但为说明问题，下面仍以平面极坐标系为例加以介绍。

第三章曾经提到，在斜交曲线坐标系下，只有应用 $\nabla_k A^j$ 或 $\nabla_k A_i$ 才能表达矢量 $\boldsymbol{A}$ 的分布强度，因此，下面先对平面极坐标系下 $\nabla_k A^j$ 的各元素一一求得，为讨论方便，令 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{v}$，即讨论位移张量的情况。

对于位移张量的诸元素，可以应用公式得出，也可由平面极坐标系的特点直接导出，即由

$$d\boldsymbol{v}=\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x^k}dx^k=\frac{\partial}{\partial x^k}(V^r\boldsymbol{e}_r+V^\varphi\boldsymbol{e}_\varphi)dx^k$$

$$\nabla_k V^j=\frac{\partial}{\partial x^k}(V^r\boldsymbol{e}_r+V^\varphi\boldsymbol{e}_\varphi)\cdot\boldsymbol{e}^j$$

已知

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_r}{\partial r}=0;\ \frac{\partial \boldsymbol{e}_r}{\partial \varphi}=-\frac{\boldsymbol{e}_\varphi}{r};\ \frac{\partial \boldsymbol{e}_\varphi}{\partial r}=\frac{\boldsymbol{e}_\varphi}{r};\ \frac{\partial \boldsymbol{e}_\varphi}{\partial \varphi}=-r\boldsymbol{e}_r$$

以及 $\boldsymbol{e}_r\cdot\boldsymbol{e}_r=1;\ \boldsymbol{e}_\varphi\cdot\boldsymbol{e}^\varphi=1;\ \boldsymbol{e}_r\cdot\boldsymbol{e}^\varphi=0;\ \boldsymbol{e}_\varphi\cdot\boldsymbol{e}^r=0$

则平面极坐标系下的四个位移张量元素分别为

$$\nabla_r V^r=\frac{\partial V^r}{\partial r};\ \nabla_r V^\varphi=\frac{\partial V^\varphi}{\partial r}+\frac{V^\varphi}{r}$$

$$\nabla_\varphi V^r=\frac{\partial V^r}{\partial \varphi}-rV^\varphi;\ \nabla_\varphi V^\varphi=\frac{\partial V^\varphi}{\partial \varphi}+\frac{V^r}{r}$$

由 $V^r=v_r,\ V^\varphi=\frac{1}{r}\mathrm{v}_\varphi$，同时将以上四式改写成物理分量，得

$$\nabla_r \mathrm{v}^r=\frac{1}{\sqrt{g^{rr}}}\nabla V_r{}^r=\frac{\partial \mathrm{v}_r}{\partial r};\quad \nabla_r \mathrm{v}^\varphi=\frac{1}{\sqrt{g^{\varphi\varphi}}}\nabla_r V^\varphi=\frac{\partial \mathrm{v}_\varphi}{\partial r}$$

$$\nabla_\varphi \mathrm{v}^r=\frac{1}{\sqrt{g^{rr}}}\nabla_\varphi V^r=\frac{\partial v_r}{\partial \varphi}-\mathrm{v}_\varphi;\quad \nabla_\varphi \mathrm{v}^\varphi=\frac{1}{\sqrt{g^{\varphi\varphi}}}\nabla_\varphi V^\varphi=\frac{\partial \mathrm{v}_\varphi}{\partial \varphi}+\mathrm{v}$$

式中 $\nabla_r \mathrm{v}^r$、$\nabla_r \mathrm{v}^\varphi$、$\nabla_\varphi \mathrm{v}^r$、$\nabla_\varphi \mathrm{v}^\varphi$ 分别为位移张量的物理分量。

为了说明它们的几何意义，现取高度为 1 的曲六面体 $ABCD$，并令 A 的速度为 $(\mathrm{v}_r,\ \mathrm{v}_\varphi)$，如图 I-4 所示

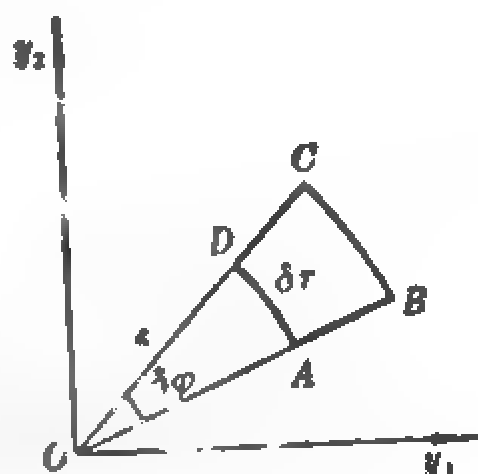


图 I-4

$$A:\ \mathrm{v}_r,\ \mathrm{v}_\varphi;\quad B:\ \mathrm{v}_r+\frac{\partial \mathrm{v}_r}{\partial r}\delta r,$$

$$\mathrm{v}_\varphi+\frac{\partial \mathrm{v}_\varphi}{\partial r}\delta r$$

至于 C、D 两点则不同，因为 C、D 两点的分速度相对于 A 点而言，不仅大小不同，方向也发生变化。当 D 点的速度相对于 A 点写出时，必须计及这一变化。这也正是速度分量对坐标的偏导数，在曲线坐标系下不能用以衡量速度 $\boldsymbol{v}$ 分布强度的原因。

分析点 A 和点 D 间速度分量的关系，可得

$$\mathrm{v}_{Dr}=\mathrm{v}_r+\frac{\partial \mathrm{v}_r}{\partial \varphi}\delta\varphi-\mathrm{v}_\varphi\delta\varphi$$

$$\mathrm{v}_{D\varphi}=\mathrm{v}_\varphi+\frac{\partial \mathrm{v}_\varphi}{\partial \varphi}\delta\varphi+\mathrm{v}_r\delta\varphi$$

同理可得 C 点的速度分量为

$$\mathrm{v}_{Cr}=\mathrm{v}_r+\frac{\partial \mathrm{v}_r}{\partial \varphi}\delta\varphi+\frac{\partial \mathrm{v}_r}{\partial r}\delta r-\mathrm{v}_\varphi\delta\varphi$$

$$\mathrm{v}_{C\varphi}=\mathrm{v}_\varphi+\frac{\partial \mathrm{v}_\varphi}{\partial \varphi}\delta\varphi+\frac{\partial \mathrm{v}_\varphi}{\partial r}\delta r+\mathrm{v}_r\delta\varphi$$

于是点 B 对于点 A 在 dt 内沿径向的相对位移为

$$d(\delta r)=(\mathrm{v}_{Br}-\mathrm{v}_r)dt=\frac{\partial \mathrm{v}_r}{\partial r}\delta r\,dt$$

$$\frac{d(\delta r)}{\delta r\,dt}=\frac{\partial \mathrm{v}_r}{\partial r}$$

点 D 沿周向相对于 A 点在 dt 内的位移为

$$d(r\delta\varphi)=(\mathrm{v}_{D\varphi}-\mathrm{v}_\varphi)dt=\left(\frac{\partial \mathrm{v}_\varphi}{\partial\varphi}\delta\varphi+\mathrm{v}_r\delta\varphi\right)dt$$

或
$$\frac{d(r\delta\varphi)}{r\delta\varphi\,dt}=\left(\frac{\partial \mathrm{v}_\varphi}{r\partial\varphi}+\frac{\mathrm{v}_r}{r}\right)$$

以上两式的左边正好是微元长度 $AB(\delta r)$ 和 $AD(r\delta\varphi)$ 的相对伸长率，而右边则分别以物理分量表示位移张量的两个对角线元素。

再分析 B 点对 A 点、D 点对 A 点的切向位移。显然，B 点对 A 点在 dt 时刻内的相对位移应是

$$(\mathrm{v}_{B\varphi}-\mathrm{v}_\varphi)dt=\frac{\partial \mathrm{v}_\varphi}{\partial r}\,\delta r\,dt$$

于是 AB 边的旋转角速度为

$$\omega_{AB}=\frac{\partial \mathrm{v}_\varphi}{\partial r}$$

这里取正值是由于 $\frac{\partial \mathrm{v}_\varphi}{\partial r}>0$ 时 $\omega_{AB}>0$。

再分析 D 点相对于 A 点在 dt 内沿径向的位移，显然，在 dt 内，D 点相对于 A 点沿径向移动的距离为

$$(\mathrm{v}_{Dr}-\mathrm{v}_r)dt=\left(\frac{\partial \mathrm{v}_r}{\partial\varphi}\delta\varphi-\mathrm{v}_\varphi\delta\varphi\right)dt$$

于是 $AD(r\delta\varphi)$ 的转动角速度 ω_{AD} 为

$$\omega_{AD}=\frac{(\mathrm{v}_{Dr}-\mathrm{v}_r)dt}{r\delta\varphi\,dt}=-\left(\frac{\partial \mathrm{v}_r}{r\partial\varphi}-\frac{\mathrm{v}_\varphi}{r}\right)$$

这里取负值是由于 $\frac{\partial \mathrm{v}_r}{r\partial\varphi}-\frac{\mathrm{v}_\varphi}{r}>0$ 时，$\omega_{AD}<0$。于是，转动角速度应是

$$\omega=\frac{1}{2}(\omega_{AB}+\omega_{AD})=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathrm{v}_\varphi}{\partial r}+\frac{\mathrm{v}_\varphi}{r}-\frac{\partial \mathrm{v}_r}{r\partial\varphi}\right)$$

或
$$\omega=\frac{1}{2r}\left[\frac{\partial(r\mathrm{v}_\varphi)}{\partial r}-\frac{\partial \mathrm{v}_r}{\partial\varphi}\right]$$

而纯剪切变形 ε 则表示成

$$\varepsilon=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_r}{r\partial\varphi}+\frac{\partial v_\varphi}{\partial r}-\frac{v_\varphi}{r}\right)$$

以上通过最简单的曲线坐标实例说明,在曲线坐标系下,描述 $\boldsymbol{A}$ 矢量场的分布强度时,要同时计及诸分量的大小变化和方向变化。作为一般情况,从矢量 $\boldsymbol{A}$ 的位移张量表达式:

$$\nabla_k A^j=\frac{\partial A^j}{\partial x^k}+A^i\Gamma^j_{ik}$$

其中"j"、"k"为指定指标,而"i"为求和指标,展开之,可得

$$\nabla_k A^j=\frac{\partial A^j}{\partial x^k}+A^1\Gamma^j_{1k}+A^2\Gamma^j_{2k}+A^3\Gamma^j_{3k}$$

将以上结果和平面极坐标做比较,可以看出,等式右边第一项表示矢量 $\boldsymbol{A}$ 的"大小"随空间坐标的变化;第二项则体现矢量 $\boldsymbol{A}$ 的方向变化、从上式还可看出,无论是矢量 $\boldsymbol{A}$ 的"大小"变化还是方向变化都不能正确表示矢量 $\boldsymbol{A}$ 的分布强度。

附录II 矢量分析概述

某物理量除在一定的单位制下测定的数量外，还需用空间一定的方位说明其性质的量称为矢量。矢量的数量(大小)称模，在图解上用箭头表示矢量，箭头的方向为矢量方向，箭头的长度就是矢量的模。

只有因次相同的矢量才能作比较，只有当方向和模均相同，才能认为两矢量相等。

当矢量的模为零时，则称此矢量为零矢量，模等于1的矢量称单位矢量。

现用模表示矢量大小，以单位矢量表示其方向，则某矢量 $\boldsymbol{A}$ 可表示成

$$\boldsymbol{A}=A\boldsymbol{a} \tag{II-1}$$

式中 A——矢量 $\boldsymbol{A}$ 的模

$\boldsymbol{a}$——矢量 $\boldsymbol{A}$ 同方向的单位矢量。

为研究问题方便，常常根据问题的性质把矢量分为：固定矢量，滑移矢量和自由矢量三种。

固定矢量——这种矢量的作用点必须有一定的位置，例如，作用在气体微团上的力，其作用点即取在气体微团所在的一点上。

滑移矢量——这种矢量的作用点可沿矢量方向任意移动而不改变问题的性质，例如，作用于刚体上的力就是这种矢量。

自由矢量——其作用点可任意选择。在作一般性讨论时取这种矢量。

下面讨论矢量的一些代数运算。

(一) 矢量的加、减和分解

1. 矢量的加减

要得到代表矢量 $\boldsymbol{a}$ 及 $\boldsymbol{b}$ 的几何和的矢量 $\boldsymbol{c}$，则必须从空间任取一点 A 作矢量 $\boldsymbol{a}$，再以矢量 $\boldsymbol{a}$ 的终点为始点作矢量 $\boldsymbol{b}$，将点 A 与矢量 $\boldsymbol{b}$ 的终点 c 联结起来，则 AC 即为矢量 $\boldsymbol{c}$，并以下式表示

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} \tag{II-2}$$

式中 矢量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 为分矢量，矢量 $\boldsymbol{c}$ 为合矢量。

如图 II-1(b)所示，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$ (II-3)

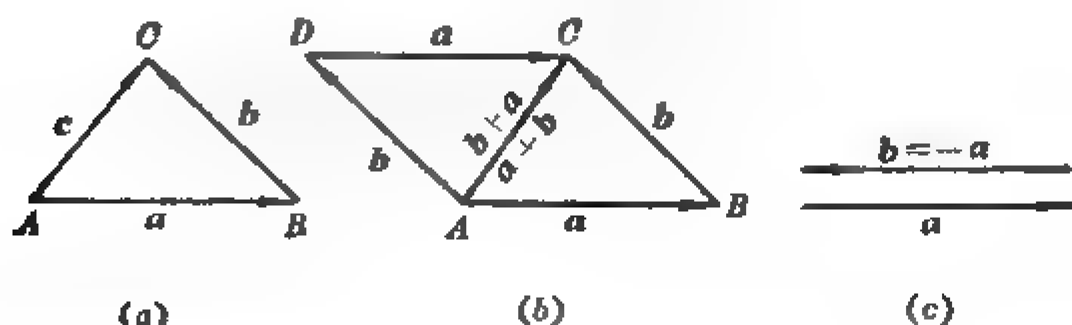


图 II-1

即矢量的几何和符合交换律。

作为特殊情况，当矢量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的终端趋于一点时，因合矢量的模为零，则矢量 $\boldsymbol{c}=0$，于是

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=0 \tag{II-4}$$

如图 II-1(c) 所示，此时 $\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{a}$。

减法为加法的逆运算，令 $\boldsymbol{x}$ 表示 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的几何差，则

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$$

由图 II-2 所示，若要从矢量 $\boldsymbol{a}$ 中减去矢量 $\boldsymbol{b}$，则可将矢量 $\boldsymbol{a}$ 加一与矢量 $\boldsymbol{b}$ 大小相同、方向相反的矢

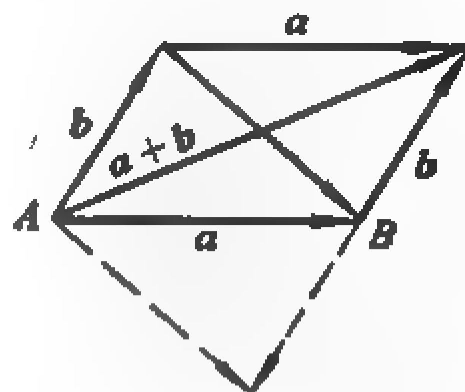


图 II-2

量 $-\boldsymbol{b}$，或在以矢量 $\boldsymbol{a}$ 及 $\boldsymbol{b}$ 所作的平行四边形中，其一对角线代表矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 之和，另一对角线则代表其差。

2．矢量的分解

共线矢量——所有互相平行的矢量均称为共线矢量，共线矢量可以下式表示

$$\boldsymbol{b}=m\boldsymbol{a} \tag{II-5}$$

当 $m>0$ 时，表示矢量 $\boldsymbol{b}$ 与矢量 $\boldsymbol{a}$ 同向；$m<0$ 时，则表示异向；$m=-1$ 表示两矢量大小相等而方向相反；特别是当 $\boldsymbol{a}$ 为单位矢量时，式(II-5)即为矢量 $\boldsymbol{b}$ 的表达式

共面矢量——如矢量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 位于同一平面内，则称矢量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 为共面矢量，对于共面矢量，为

$$\boldsymbol{c}=m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b} \tag{II-6}$$

式中 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 为不共线；反之，所有与不共线矢量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 为共平面的矢量 $\boldsymbol{c}$ 均可用式(II-6)表示。式(II-6)可看成矢量 $\boldsymbol{c}$ 在 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 方向的唯一分解式。

若矢量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 为不共平面，则任一矢量 $\boldsymbol{d}$ 可以下式表示

$$\boldsymbol{d}=m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b}+p\boldsymbol{c} \tag{II-7}$$

则矢量 $\boldsymbol{d}$ 可分解为相继与 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 及 $\boldsymbol{c}$ 三矢量相平行的三分量，而式(II-7)为唯一的分解式。

作为特例，如果 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 均为单位矢量，且 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{u}_1$、$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{u}_2$、$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{u}_3$，则

$$\boldsymbol{d}=m\boldsymbol{u}_1+n\boldsymbol{u}_2+p\boldsymbol{u}_3$$

式中 $m\boldsymbol{u}_1$、$n\boldsymbol{u}_2$、$p\boldsymbol{u}_3$ 分别称为 $\boldsymbol{d}$ 的可分解分量；如果 $\boldsymbol{u}_1$、$\boldsymbol{u}_2$、$\boldsymbol{u}_3$ 互成正交，则 $m\boldsymbol{u}_1$、$n\boldsymbol{u}_2$、$p\boldsymbol{u}_3$ 为 $\boldsymbol{d}$ 的投影分量，m、n、p 为矢量 $\boldsymbol{d}$ 的投影分量的模，简称投影。

如果 $$\boldsymbol{d}=m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b}+p\boldsymbol{c}=0$$

即 $\boldsymbol{d}$ 为零矢量，则 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 为共平面。

3. 一矢量对另一矢量的投影

设矢量 $\boldsymbol{a}$ 在矢量 $\boldsymbol{b}$ 方向的投影为 a_b，则

$$a_b = a\cos\varphi = a\cos(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}) \tag{II-8}$$

式中 φ——矢量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的夹角

再假定 $a_1\boldsymbol{u}_1$、$a_2\boldsymbol{u}_2$、$a_3\boldsymbol{u}_3$ 分别为矢量 $\boldsymbol{a}$ 的投影分量，由于三个投影分量可取代矢量 $\boldsymbol{a}$，矢量 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 方向的投影等于三分量在 $\boldsymbol{b}$ 方向的投影，即

$$a_b = a\cos(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}) = a_1\cos(\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{b}) + a_2\cos(\boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{b}) + a_3\cos(\boldsymbol{u}_3,\ \boldsymbol{b})$$

上式左右两边均除以 a，则

$$\cos(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}) = \cos(\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{a})\cos(\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{b}) + \cos(\boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{b})\cos(\boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{b}) + \cos(\boldsymbol{u}_3,\ \boldsymbol{a})\cos(\boldsymbol{u}_3,\ \boldsymbol{b}) \tag{II-9}$$

（二）矢量的积

1. 矢量的数性积

两矢量 $\boldsymbol{a}$ 及 $\boldsymbol{b}$ 的数性积定义为

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = ab\cos\varphi = ab\cos(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}) \tag{II-10}$$

即两矢量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的模与两矢量间夹角之余弦的乘积。

数性积的特点有

(1) 两矢量的数性积为一标量；

(2) 数性积的正负号视两矢量之夹角而定。如夹角为锐角，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}>0$，反之为负。

特殊情况，当 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ 则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$；

当 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$，且方向相同，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=ab$；

当 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$，但方向相反，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-ab$。

(3) 由定义可知，数性积符合交换律，即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$$

数性积也符合分配律，即

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$$

(4) 由以上结果可得出，如果单位矢量 $\boldsymbol{u}_1$、$\boldsymbol{u}_2$、$\boldsymbol{u}_3$ 互成正交，则

$$\boldsymbol{u}_1\cdot\boldsymbol{u}_1=\boldsymbol{u}_2\cdot\boldsymbol{u}_2=\boldsymbol{u}_3\cdot\boldsymbol{u}_3=1;$$

$$\boldsymbol{u}_1\cdot\boldsymbol{u}_2=\boldsymbol{u}_2\cdot\boldsymbol{u}_3=\boldsymbol{u}_3\cdot\boldsymbol{u}_1=0。$$

如单位矢量 $\boldsymbol{l}_1$、$\boldsymbol{l}_2$、$\boldsymbol{l}_3$ 互成斜交，则

$$\boldsymbol{l}_1\cdot\boldsymbol{l}_1=1,\ \cdots;\ \boldsymbol{l}_1\cdot\boldsymbol{l}_2=\cos(\boldsymbol{l}_1,\ \boldsymbol{l}_2),\ \cdots。$$

(5) 利用式 II-9 及矢量 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 数性积的定义式，可得

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=ab[\cos(\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{a})\cos(\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{b})+\cos(\boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{a})\cos(\boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{b})$$
$$+\cos(\boldsymbol{u}_3,\ \boldsymbol{a})\cos(\boldsymbol{u}_3,\ \boldsymbol{b})]$$

如令 $a\cos(\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{a})=a_1,\ b\cos(\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{b})=b_1,\ \cdots\cdots$

则

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3 \tag{II-11}$$

上式为 $\boldsymbol{u}_1$、$\boldsymbol{u}_2$、$\boldsymbol{u}_3$ 互成正交条件下，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 的投影分量表达式。

2．矢量的矢性积

一矢量，如其大小等于以矢量 $\boldsymbol{a}$·$\boldsymbol{b}$ 为棱边构成的平行四边形面积，其方向垂直于两矢量所在的平面，而所指的方向为由 $\boldsymbol{a}$ 到 $\boldsymbol{b}$ 顺最短路程绕该矢量旋转时的方向，则此矢量称为两矢量 $\boldsymbol{a}$ 及 $\boldsymbol{b}$ 的矢性积。

根据定义，矢量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 矢性积的模为 $ab\sin(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})$，如以 $\boldsymbol{c}$ 表示矢量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的矢性积，则

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} \tag{II-12}$$

矢性积的性质为

(1) 当 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$ 时，由于 $\sin(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})=0$，可得 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=0$；当 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ 时，则由于 $\sin(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})=1$，所以 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=ab$。

(2) 矢性积不符合交换律，即 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$。

(3) 矢性积符合分配律，即

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$$

(4) 根据定义，如令 $\boldsymbol{u}_1$、$\boldsymbol{u}_2$、$\boldsymbol{u}_3$ 互成正交，则

$$\boldsymbol{u}_1\times\boldsymbol{u}_1=\boldsymbol{u}_2\times\boldsymbol{u}_2=\boldsymbol{u}_3\times\boldsymbol{u}_3=0$$

$$\boldsymbol{u}_1\times\boldsymbol{u}_2=-\boldsymbol{u}_2\times\boldsymbol{u}_1=\boldsymbol{u}_3,\ \cdots\cdots,$$

(5) 如 $\boldsymbol{l}_1$、$\boldsymbol{l}_2$、$\boldsymbol{l}_3$ 互成斜交，则

$$\boldsymbol{l}_1\times\boldsymbol{l}_1=\boldsymbol{l}_2\times\boldsymbol{l}_2=\boldsymbol{l}_3\times\boldsymbol{l}_3=0,$$

$$\boldsymbol{l}_1\times\boldsymbol{l}_2=\sin(\boldsymbol{l}_1,\ \boldsymbol{l}_2)\boldsymbol{l}'_3,\ \cdots\cdots,$$

式中　$\boldsymbol{l}'_3\perp\boldsymbol{l}_1$，$\boldsymbol{l}_2$ 为单位矢量。

(6) 如将 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 展开成分解式，则

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(a_2b_3-a_3b_2)\boldsymbol{u}_1+(a_3b_1-a_1b_3)\boldsymbol{u}_2+(a_1b_2-a_2b_1)\boldsymbol{u}_3$$

或

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \boldsymbol{u}_3\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix} \tag{II-13}$$

式中　$\boldsymbol{u}_1$、$\boldsymbol{u}_2$、$\boldsymbol{u}_3$ 分别表示互成正交的单位矢量。

3. 矢量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 的数性三重积 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$

数性三重积 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ 为一标量。数值上等于以 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 为棱边构成的体积 V，其性质为

(1) 当三个矢量共平面，由于三个共平面矢量构成的体积为零，因而 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=0$；

(2) 三矢量中有任两个矢量相等或共线，则

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=0$$

理由同第一点。

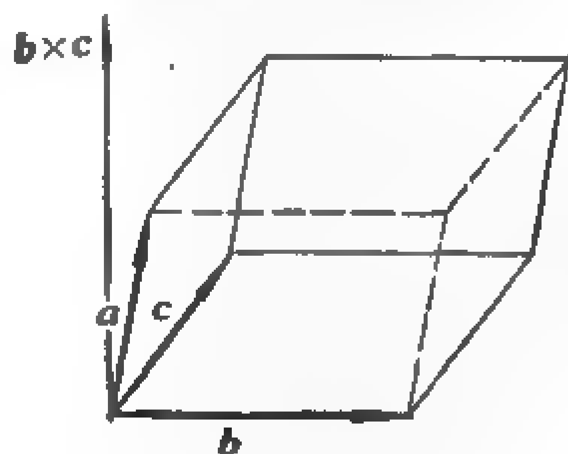


图 II-3

(3) 如果矢量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 互成正交，则 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ 为正六面体，其棱边为矢量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 的模。

(4) 如果矢量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 互成斜交，则如图 II-3 所示

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=abc\sin\varphi\cos\theta$$

(5) 根据定义

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})&=\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})=\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=-\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b})\\&=-\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})=-\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})\end{aligned}$$

为便于记忆，以上结果可看成 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 按逆时针排列时为正；以顺时针排列为负。

(6) 由以上结果，可得

$$\boldsymbol{u}_1\cdot(\boldsymbol{u}_2\times\boldsymbol{u}_3)=\boldsymbol{u}_3\cdot(\boldsymbol{u}_1\times\boldsymbol{u}_2)=1$$

$$\boldsymbol{u}_1\cdot(\boldsymbol{u}_3\times\boldsymbol{u}_2)=\boldsymbol{u}_3\cdot(\boldsymbol{u}_2\times\boldsymbol{u}_1)=-1$$

(7) 对于斜交的单位矢量，如图 II-3 所示，令 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{l}_1$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{l}_2$，$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{l}_3$，则

$$\boldsymbol{l}_1\cdot(\boldsymbol{l}_2\times\boldsymbol{l}_3)=\cos\theta\sin\varphi$$

(8) 矢量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 的数性三重积 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ 可展开写成

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=&a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3\\&-a_3b_2c_1\end{aligned}$$

或

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}\tag{II-14}$$

4. 矢性三重积 $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$

矢量 $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ 既垂直于 $\boldsymbol{a}$，又垂直于 $(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$，因而 $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ 与 $\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 共平面，据此，矢量 $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ 必指向垂直于矢量 $\boldsymbol{a}$ 的平面与矢量 $\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 所在平面交线的方向。

为了将 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 的矢性三重积展开成计算式，可先将 $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$ 展

开为

$$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=(b_2c_3-b_3c_2)\boldsymbol{u}_1+(b_3c_1-b_1c_3)\boldsymbol{u}_2+(a_1b_2-a_2b_1)\boldsymbol{u}_3$$

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\begin{vmatrix}\boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \boldsymbol{u}_3\\ a_1 & a_2 & a_3\\ (b_2c_3-b_3c_2) & (b_3c_1-b_1c_3) & (b_1c_2-b_2c_1)\end{vmatrix}$$

于是

$$[\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})]_1=a_2(b_1c_2-b_2c_1)-a_3(b_3c_1-b_1c_3)$$

上式右边 $\pm a_1b_1c_1$，则得

$$[\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})]_1=b_1(a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3)-c_1(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)$$

或

$$[\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})]_1=b_1(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})-c_1(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$$

依此类推，可得

$$[\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})]_2=b_2(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})-c_2(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$$

$$[\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})]_3=b_3(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})-c_3(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$$

于是

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})-\boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}) \qquad \text{(II-15)}$$

5．一些有关的矢量代数运算

在张量分析中常用到一些较复杂的矢量代数运算，现举例如下：

(1) 试证 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$

证：令 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，则

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=\boldsymbol{x}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=\boldsymbol{d}\cdot(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{c})$$

或

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=\boldsymbol{d}[(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}]=[\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})-\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})]\cdot\boldsymbol{d}$$
$$=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}) \qquad \text{(II-16)}$$

(2) 试证 $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})+\boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})+\boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=0$

证：

由 $$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})-\boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$$

$$\boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})=\boldsymbol{c}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})-\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$$

$$\boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b})-\boldsymbol{b}(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})$$

将以上三式相加，则得

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})+\boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})+\boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=0 \qquad \text{(II-17)}$$

(3) 试证$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=\boldsymbol{b}[\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})]-\boldsymbol{a}[\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})]$

证： 令 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 则

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=\boldsymbol{c}(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{d})-\boldsymbol{d}(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{c})=\boldsymbol{c}[(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{d}]$$
$$-\boldsymbol{d}[(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}] \qquad \text{(II-18)}$$

上式表示矢量$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})$向$\boldsymbol{c}$、$\boldsymbol{d}$方向分解的分解式，同样也可向$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$方向分解，写出其分解式为$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=\boldsymbol{b}[\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})]-\boldsymbol{a}[\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})]$。

应用以上结果，则

$$\boldsymbol{b}[\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})]-\boldsymbol{a}[\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})]=\boldsymbol{c}[(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{d}]$$
$$-\boldsymbol{d}[(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}]$$

由以上讨论可得

$$\boldsymbol{d}=\boldsymbol{a}\left[\boldsymbol{d}\cdot\frac{(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})}{\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})}\right]+\boldsymbol{b}\left[\boldsymbol{d}\cdot\frac{(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})}{\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})}\right]$$
$$+\boldsymbol{c}\left[\boldsymbol{d}\cdot\frac{(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})}{\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})}\right] \qquad \text{(II-18)}'$$

即 $\boldsymbol{d}$ 向矢量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$方向分解的分解式。

(4) 试证$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot[(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})]=[\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})]^2$

证： 令 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$

于是

$$(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})=\boldsymbol{c}[(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}]-\boldsymbol{a}[(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{c}]$$
$$=\boldsymbol{c}[(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}]$$

所以

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot[(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})]=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\{\boldsymbol{c}[\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})]\}$$

$$=[(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}][\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})]$$

因
$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$$

则
$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot[(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})]=[\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})]^2 \qquad \text{(II–19)}$$

(5) 试证

$$[\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})][\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})]=\begin{vmatrix}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{c}\\ \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{c}\\ \boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{c}\end{vmatrix}$$

证：由

$$[\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})]=\begin{vmatrix}A_1 & A_2 & A_3\\ B_1 & B_2 & B_3\\ C_1 & C_2 & C_3\end{vmatrix}$$

$$[\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})]=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}$$

代入之，立即可得

(三) 梯度、散度和旋度

在力学中，常常引进梯度来衡量标量场、矢量场等的分布强度，至于散度，可看成各种力学场的数性导数，而旋度则可看成是矢量场的矢性导数，下面分别对它们作些讨论。

1. 梯度

设在某标量场中任取两相邻的等值面 ϕ 和 $\phi+d\phi$，如图 II–4 所示，$\boldsymbol{n}$ 为过等值

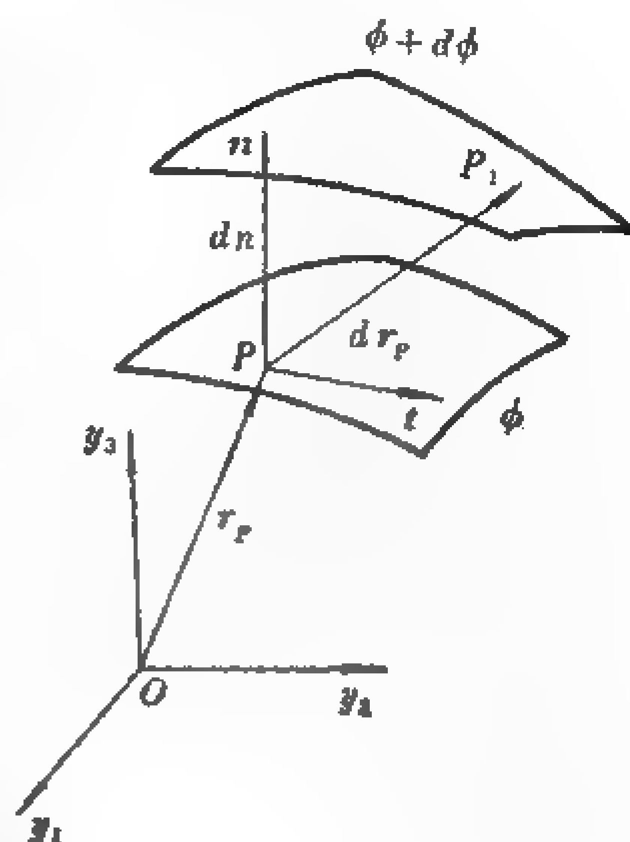


图 II–4

面上P的法向单位矢量(指向ϕ增加方向)。

在空间任取一点O，以O为原点取笛卡尔坐标系$Oy_1y_2y_3$，则P点的位置矢量为$\boldsymbol{r}_P$；在ϕ等值面邻近另取$\phi+d\phi$的等值面，由于从ϕ到$\phi+d\phi$沿$\boldsymbol{n}$方向的距离最短，因而

$$\frac{\partial\phi}{\partial n}=\left(\frac{\partial\phi}{\partial s}\right)_{max}$$

ds——$d\boldsymbol{r}_P=\boldsymbol{PP}_1$的绝对值。

现定义$\frac{\partial\phi}{\partial n}\boldsymbol{n}$为标量场$\phi(y_1, y_2, y_3)$的梯度，并用符号grad ϕ表示，于是

$$\text{grad}\phi=\frac{\partial\phi}{\partial n}\boldsymbol{n} \tag{II-20}$$

由图II-4所示，得

$$d\phi=\text{grad}\phi\cdot d\boldsymbol{r}_P=\frac{\partial\phi}{\partial n}dn \tag{a}$$

同时，由

$$d\phi=\frac{\partial\phi}{\partial y_1}dy_1+\frac{\partial\phi}{\partial y_2}dy_2+\frac{\partial\phi}{\partial y_3}dy_3=\left(\frac{\partial\phi}{\partial y_1}\boldsymbol{u}_1+\frac{\partial\phi}{\partial y_2}\boldsymbol{u}_2+\frac{\partial\phi}{\partial y_3}\boldsymbol{u}_3\right)\cdot(dy_1\boldsymbol{u}_1+dy_2\boldsymbol{u}_2+dy_3\boldsymbol{u}_3)$$

因

$$d\boldsymbol{r}_P=dy_1\boldsymbol{u}_1+dy_2\boldsymbol{u}_2+dy_3\boldsymbol{u}_3$$

于是

$$d\phi=\left(\frac{\partial\phi}{\partial y_1}\boldsymbol{u}_1+\frac{\partial\phi}{\partial y_2}\boldsymbol{u}_2+\frac{\partial\phi}{\partial y_3}\boldsymbol{u}_3\right)\cdot d\boldsymbol{r}_P \tag{b}$$

对比(a)、(b)两式，即得

$$\text{grad}\phi=\frac{\partial\phi}{\partial y_1}\boldsymbol{u}_1+\frac{\partial\phi}{\partial y_2}\boldsymbol{u}_2+\frac{\partial\phi}{\partial y_3}\boldsymbol{u}_3 \tag{II-21}$$

式(II-21)即为笛卡尔坐标系下，梯度的定义式。

如令$\phi(y_1, y_2, y_3)=\text{const}$，则

$$d\phi=0$$

或 $$\mathrm{grad}\phi\cdot d\boldsymbol{r}_P=0$$

上式表明 $\mathrm{grad}\phi$ 和等值面 $\phi=\mathrm{const}$ 垂直。

2．散度

速度 $\boldsymbol{v}$ 的散度已在附录 I 中论及，对于任一矢量 $\boldsymbol{a}$ 的散度，这里只写出定义式

$$\mathrm{div}\boldsymbol{a}=\frac{\partial a_1}{\partial y_1}+\frac{\partial a_2}{\partial y_2}+\frac{\partial a_3}{\partial y_3}=\nabla\cdot\boldsymbol{a} \tag{II-22}$$

如把 ∇ 看成矢量，则上式可看成 ∇ 和 $\boldsymbol{a}$ 的数性积，值得注意的是，∇ 既是矢量又是微分算子，它对其后面的函数还有微分运算的功能。

3．旋度

矢量 $\boldsymbol{a}$ 的旋度以 $\nabla\times\boldsymbol{a}$ 表示，其定义式为

$$\nabla\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{u}_1\left(\frac{\partial a_3}{\partial y_2}-\frac{\partial a_2}{\partial y_3}\right)+\boldsymbol{u}_2\left(\frac{\partial a_1}{\partial y_3}-\frac{\partial a_3}{\partial y_1}\right)+\boldsymbol{u}_3\left(\frac{\partial a_2}{\partial y_1}-\frac{\partial a_1}{\partial y_2}\right) \tag{II-23}$$

或以行列式表示为

$$\nabla\times\boldsymbol{a}=\mathrm{rot}\boldsymbol{a}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \boldsymbol{u}_3\\ \dfrac{\partial}{\partial y_1} & \dfrac{\partial}{\partial y_2} & \dfrac{\partial}{\partial y_3}\\ a_1 & a_2 & a_3\end{vmatrix} \tag{II-23$'$}$$

（四）矢量的二次微分运算

在场论中常常遇到一些二次微分运算，为便于查阅，这里引进若干二次微分运算公式（不作证明）。

在作二次微分运算中，除应用哈密尔顿算子

$$\nabla=\boldsymbol{u}_1\frac{\partial}{\partial y_1}+\boldsymbol{u}_2\frac{\partial}{\partial y_2}+\boldsymbol{u}_3\frac{\partial}{\partial y_3}$$

以外，还引进拉普拉斯算子

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial y_2^2}+\frac{\partial^2}{\partial y_3^2}=\nabla\cdot\nabla$$

应用这两个算子，可得到一些基本关系式为

$$\boldsymbol{a}\cdot\nabla=a_1\frac{\partial}{\partial y_1}+a_2\frac{\partial}{\partial y_2}+a_3\frac{\partial}{\partial y_3}$$

$$(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\phi=a_1\frac{\partial\phi}{\partial y_1}+a_2\frac{\partial\phi}{\partial y_2}+a_3\frac{\partial\phi}{\partial y_3}$$

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)b=&\left(a_1\frac{\partial b_1}{\partial y_1}+a_2\frac{\partial b_1}{\partial y_2}+a_3\frac{\partial b_1}{\partial y_3}\right)\boldsymbol{u}_1\\&+\left(a_1\frac{\partial b_2}{\partial y_1}+a_2\frac{\partial b_2}{\partial y_2}+a_3\frac{\partial b_2}{\partial y_3}\right)\boldsymbol{u}_2\\&+\left(a_1\frac{\partial b_3}{\partial y_1}+a_2\frac{\partial b_3}{\partial y_2}+a_3\frac{\partial b_3}{\partial y_3}\right)\boldsymbol{u}_3\end{aligned}$$

下面列出若干二次微分运算的公式：

1. $\nabla(\phi\psi)=\phi\nabla\psi+\psi\nabla\phi$
2. $\nabla\cdot(\phi\boldsymbol{a})=\phi\nabla\cdot\boldsymbol{a}+\nabla\phi\cdot\boldsymbol{a}$
3. $\nabla\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{b}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{a})-\boldsymbol{a}\times(\nabla\times\boldsymbol{b})$
4. $\nabla(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times(\nabla\times\boldsymbol{a})+\boldsymbol{a}\times(\nabla\times\boldsymbol{b})$
5. $\nabla\times(\phi\boldsymbol{a})=(\nabla\phi)\times\boldsymbol{a}+\phi(\nabla\times\boldsymbol{a})$
6. $\nabla\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}(\nabla\cdot\boldsymbol{a})-(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}(\nabla\cdot\boldsymbol{b})$
7. $\nabla\times(\nabla\phi)=0$
8. $\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{a})=0$
9. $\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{a})=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{a})-\Delta\boldsymbol{a}$
10. $(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{a}=1/2\,\nabla a^2-\boldsymbol{a}\times(\nabla\times\boldsymbol{a})$
11. $\nabla^2(\phi\psi)=\Delta(\phi\psi)=\phi\nabla^2\psi+2\nabla\phi\cdot\nabla\psi+\psi\nabla^2\phi$
12. $\nabla\cdot(\nabla\phi)=\nabla^2\phi=\Delta\phi$
13. $\nabla\cdot(\phi\nabla\psi)=\phi\Delta\psi+\nabla\phi\cdot\nabla\psi$

（五）矢量场的分类

由上面讨论可知，矢量场的特点可用矢量的散度——矢量的

数性导数以及旋度——矢量的矢性导数加以表征。在工程上，为讨论问题方便，常常根据矢量的散度、旋度及其组合，将矢量场划分为下列各类：

一、螺管场

如果矢量函数 $\boldsymbol{a}$ 处处满足

$$\mathrm{div}\boldsymbol{a}=0$$

则此矢量场为螺管场。

二、无旋场

如矢量函数 $\boldsymbol{a}$ 处处满足

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{a}=0$$

则称此矢量场为无旋场，由于任一标量函数 ϕ 梯度的旋度恒等于零，因而，对于无旋场为

$$\boldsymbol{a}=\mathrm{grad}\phi$$

上式表明，无旋场即为有势场。

3．复合 lamellar 场

如矢量函数 $\boldsymbol{a}$ 处处满足

$$\boldsymbol{a}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{a})=0$$

则此矢量场称复合 lamellar 场，由矢量的代数运算可知，此矢量场的矢量函数 $\boldsymbol{a}$ 处处满足

$$\boldsymbol{a}\perp\nabla\times\boldsymbol{a}$$

4．Betrami 场

如矢量函数 $\boldsymbol{a}$ 处处满足

$$\boldsymbol{a}\times(\nabla\times\boldsymbol{a})=0$$

则称 Betrami 场，其特点是矢量函数 $\boldsymbol{a}$ 与 $\nabla\times\boldsymbol{a}$ 处处平行。

5．螺管复合 lamellar 场

对于这种矢量场，其矢量函数 $\boldsymbol{a}$ 处处满足

$$\boldsymbol{a}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{a})=0;\ \mathrm{div}\boldsymbol{a}=0$$

6．螺管复合 Betrami 场

对于这种矢量场，其矢量函数 $\boldsymbol{a}$ 处处满足

$$\boldsymbol{a}\times(\nabla\times\boldsymbol{a})=0;\ \mathrm{div}\boldsymbol{a}=0$$

7．拉普拉斯(Laplacian)场

对于这种矢量场，矢量函数 $\boldsymbol{a}$ 处处满足

$$\nabla\cdot\boldsymbol{a}=0;\ \nabla\times\boldsymbol{a}=0$$

由 $\nabla\times\boldsymbol{a}=0$，可得 $\boldsymbol{a}=\nabla\phi$，于是

$$\nabla\cdot\boldsymbol{a}=\nabla\cdot(\nabla\phi)=\nabla^2\phi=\Delta\phi=0$$

上式表明，对于这类矢量场，可用标量函数 ϕ 的拉普拉斯方程表述。